

Fotony – Cząstki Światła

Iwo Białynicki-Birula*, Zofia Białynicka-Birula**

*Centrum Fizyki Teoretycznej PAN

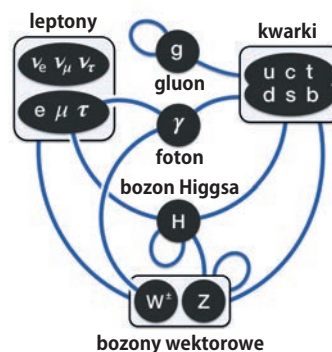
**Instytut Fizyki PAN

Historia wprowadzenia do fizyki pojęcia fotonu obejmuje okres 27 lat. Rozpoczął ją Max Planck w roku 1900 postulując istnienie kwantów energii promieniowania ciała doskonale czarnego. Pięć lat później Albert Einstein wykorzystał ideę Plancka do wyjaśnienia fotoefektu. W 1924 roku Arthur Compton wprowadził pojęcie zlokalizowanych kwantów światła do opisu oddziaływania światła z elektronami. Nazwę *foton* zaproponował Gilbert Lewis dopiero w 1926 roku. Historię tę wieńczy artykuł Paula Diraca o kwantowej teorii pola elektromagnetycznego z roku 1927. Ta ciekawa historia została opisana szerzej w rocznicowym numerze Postępów Fizyki z 2005 roku (<http://pf.ptf.net.pl/PF-2005-6/>).

1. Foton jako cząstka elementarna

Foton jest jedną z 17 cząstek elementarnych (nie licząc antycząstek). Po odkryciu zjawiska mieszania się neutrino, które w efekcie oznacza, że neutrino mają jednak masę spoczynkową, foton pozostał jedyną cząstką bezmasową. Fotony mają własny moment pędu równy 1 (w jednostkach \hbar), są zatem bozonami. Prawoskrętne (lewoskrętne) fotony charakteryzują się dodatnią (ujemną) wartością rzutu własnego momentu pędu na kierunek ruchu. W pustej przestrzeni prawoskrętne i lewoskrętne fotony są odrębnymi cząstkami, nie można bowiem przeprowadzić fotonu prawoskrętnego w lewoskrętny przez obrót jego własnego momentu pędu, tak jak to ma miejsce w przypadku cząstek obdarzonych masą spoczynkową oraz własnym momentem pędu (spinem). Jednakże fotony poruszające się w ośrodku materialnym mogą zmieniać swoją skrętność w wyniku oddziaływania z ośrodkiem.

Fotony towarzyszą prawie wszystkim reakcjom z udziałem cząstek elementarnych. Najczęściej są to reakcje, w których fotony nie odgrywają dominującej roli i ich udział sprowadza się jedynie do niewielkiej modyfikacji procesu. Na przykład tak jest przy rozpadzie mionu $\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Oprócz tego podstawowego kanału rozpadu, mamy także rozpad promienisty z udziałem fotonu $\mu \rightarrow e + \nu_\mu + \bar{\nu}_e + \gamma$. Współczynnik



Rys. 1. Foton zajmuje centralną pozycję ponieważ oddziałuje ze wszystkimi naładowanymi cząstkami elementarnymi

rozgałęzienia dla takich promienistych rozpadów jest jednak rzędu jednej setnej, gdyż jest on proporcjonalny do stałej subtelnej struktury α , charakterystycznej dla poprawek elektromagnetycznych. Są rozpad promieniste, w których foton odgrywa równorzędną rolę. Do takich należą na przykład rozpad $\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$ oraz promieniste rozpady hiperonów i cząstki J/ψ ,

$$\begin{aligned} \Xi^0 &\rightarrow \Sigma^0 + \gamma, & \Xi^0 &\rightarrow \Lambda + \gamma, \\ \Sigma^0 &\rightarrow \Lambda + \gamma, & J/\psi &\rightarrow \pi^+ + \pi^- + \gamma. \end{aligned}$$

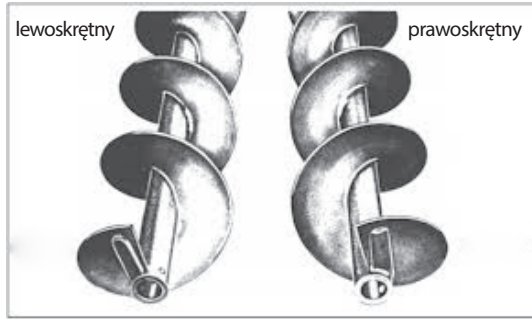
Kluczową rolę odgrywa jednak foton w zjawiskach atomowych i molekularnych. Zjawiska te, przede wszystkim widma atomowe i cząsteczkowe, były szczególnie badane zanim jeszcze odkryto fotony. Teoria oddziaływania fotonu z elektronami i jądrami w atomach pozwala zrozumieć własności tych widm. Badania te odegrały decydującą rolę w powstaniu mechaniki kwantowej atomu (model Bohra), choć początkowo widma były interpretowane na gruncie klasycznej teorii pola elektromagnetycznego.

2. Mechanika kwantowa fotonu

Ze względu na to, że foton jest cząstką elementarną, można oczekiwać, iż uda się sformułować kwantową teorię fotonu na wzór mechaniki kwantowej cząstek obdarzonych masą spoczynkową. Bezmasowość fotonu stwarza jednak poważne trudności przy budowaniu takiej

teorii. Z tego powodu mechanika kwantowa fotonu nie jest powszechnie znana. Celem tego artykułu jest przedstawienie naszej wersji tej teorii.

Podobnie jak w przypadku wszystkich innych cząstek kwantowych, stan fotonu powinien być opisany funkcją falową. W przypadku fotonu, w odróżnieniu od cząstek z masą, podstawową rolę odgrywa funkcja falowa w przestrzeni pędów, a nie w przestrzeni położenia. Ponieważ mamy dwa rodzaje fotonów: prawoskrętne i lewoskrętne, potrzebne są dwie funkcje falowe $f_+(\mathbf{k})$ i $f_-(\mathbf{k})$, gdzie \mathbf{k} jest wektorem falowym. Funkcje falowe $f_{\pm}(\mathbf{k})$ mają standardową interpretację probabilistyczną: kwadrat modułu funkcji falowej jest gęstością prawdopodobieństwa wykrycia fotonu z pędem $\hbar\mathbf{k}$.



Rys. 2. Lewoskrętne i prawoskrętne fotony są odrębnymi cząstkami

Odrębność fotonów prawoskrętnych i lewoskrętnych uwidacznia się [1, 2, 3] w prawach transformacyjnych funkcji falowych $f_{\pm}(\mathbf{k})$. Funkcje te zgodnie z klasyfikacją Wignera [4] stanowią dwie różne jednowymiarowe reprezentacje grupy Poincarégo (niejednorodnej grupy Lorentza). Z tego powodu funkcje falowe $f_+(\mathbf{k})$ i $f_-(\mathbf{k})$ nie można ze sobą superponować, podobnie jak nie można do siebie dodawać składowych wektora w różnych kierunkach. Ogólny (czysty) stan fotonu można opisać następującą dwuskładnikową funkcją falową

$$\mathbf{f}(\mathbf{k}) = \begin{pmatrix} f_+(\mathbf{k}) \\ f_-(\mathbf{k}) \end{pmatrix}, \quad (1)$$

spełniającą warunek unormowania

$$\int \frac{d^3k}{k} |\mathbf{f}(\mathbf{k})|^2 = 1. \quad (2)$$

Podzielenie elementu objętości w tym wzorze przez moduł wektora falowego podyktowane jest wymogami teorii relatywistycznej. Tak unormowany element objętości jest niezmienniczy względem przekształceń Lorentza. Można też użyć innej notacji wprowadzając funkcję $f(\mathbf{k}, \lambda)$, w której parametr λ przebiega dwie wartości \pm . Podobnie postępujemy w przypadku funkcji falowych cząstek o spinie 1/2, których dwie składowe możemy ustawić w kolumnę albo ponumerować wskaźnikiem.

Z dwuskładnikowych funkcji falowych (1) używając macierzy Pauliego można zbudować cztery rzeczywiste parametry opisujące stan polaryzacji fotonu,

$$\begin{aligned} S_0 &= \mathbf{f}(\mathbf{k})^\dagger \mathbf{f}(\mathbf{k}), & S_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{k})^\dagger \sigma_x \mathbf{f}(\mathbf{k}), \\ S_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{k})^\dagger \sigma_y \mathbf{f}(\mathbf{k}), & S_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{k})^\dagger \sigma_z \mathbf{f}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (3)$$

W dalszym ciągu pokażemy, że tak zdefiniowane wielkości są parametrami Stokesa opisującymi polaryzację fali elektromagnetycznej.

Generatory grupy Poincarégo (translacji w czasie \hat{H} i w przestrzeni $\hat{\mathbf{P}}$, obrotów $\hat{\mathbf{J}}$ i szczególnych przekształceń Lorentza $\hat{\mathbf{N}}$) mają postać:

$$\hat{H} = \hbar\omega, \quad (4)$$

$$\hat{\mathbf{P}} = \hbar\mathbf{k}, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{J}} = -i\hbar [\mathbf{k} \times (\partial_{\mathbf{k}} - i\hat{\lambda}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}))] + \hbar\hat{\lambda}\mathbf{k}/k, \quad (6)$$

$$\hat{\mathbf{N}} = i\hbar\omega (\partial_{\mathbf{k}} - i\hat{\lambda}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})), \quad (7)$$

gdzie $\hat{\lambda} = \sigma_z$, zaś $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = \{-k_y k_z, k_x k_z, 0\}/(kk_{\perp}^2)$. Występowanie w tych wzorach kombinacji $\mathbf{D}_{\mathbf{k}} = \partial_{\mathbf{k}} - i\hat{\lambda}\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ wynika z własności geometrii na stożku świetlnym. Nie jest to geometria płaska, zaś $\mathbf{D}_{\mathbf{k}}$ jest pochodną kowariantną. Rotacja wektora $\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k})$ wynosi $\nabla \times \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{k}) = -\mathbf{k}/k^3$ i wyznacza krzywiznę na stożku świetlnym, która jest źródłem *fazy Berry'ego* dla fotonów.

Operatory (4-7) w działaniu na funkcje falowe fotonu (1) reprezentują podstawowe wielkości fizyczne: energię \hat{H} , pęd $\hat{\mathbf{P}}$, moment pędu $\hat{\mathbf{J}}$ i moment energii $\hat{\mathbf{N}}$. Na uwagę zasługuje fakt, że moment pędu składa się z dwóch części: z części prostopadłej do pędu i części do niego równoległej. Część prostopadła reprezentuje orbitalny moment pędu fotonu, część równoległa zaś może być interpretowana jako własny moment pędu fotonu. Wynika stąd, że występuje zasadnicza różnica między własnym momentem pędu fotonu a spinem cząstek obdarzonych masą. W przypadku tych ostatnich spin może być skierowany w dowolnym kierunku.

3. Zasady nieoznaczoności dla fotonu

W nierelatywistycznej mechanice kwantowej zasada nieoznaczoności Heisenberga w trzech wymiarach ma postać:

$$\Delta \mathbf{R} \Delta \mathbf{P} \geq \frac{3}{2} \hbar, \quad (8)$$

gdzie $\Delta \mathbf{R} = \sqrt{\langle (\mathbf{R} - \langle \mathbf{R} \rangle)^2 \rangle}$ oraz $\Delta \mathbf{P} = \sqrt{\langle (\mathbf{P} - \langle \mathbf{P} \rangle)^2 \rangle}$. Zasada ta nie przenosi się automatycznie na przypadek fotonu. Głównym źródłem trudności jest brak operatora położenia fotonu, który posiadałby wszystkie własności, których oczekivalibyśmy od takiego operatora. W nierelatywistycznej mechanice kwantowej operator położenia \mathbf{R} w reprezentacji pędowej ma postać

$i\hbar\partial_p$. Zastosowanie tego prostego przepisu w mechanice kwantowej fotonu (dla fotonu $i\hbar\partial_p = i\partial_k$) nie uwzględnia jednak krzywizny na stożku świetlnym; jedynie pochodna kowariantna \mathbf{D}_k ma sens geometryczny. Sens fizyczny \mathbf{D}_k można odczytać z wzoru (7) na moment energii, z którego wynika, że $\mathbf{R} \equiv i\mathbf{D}_k$ jest operatorem środka energii fotonu. Operator ten spełnia standardowe reguły przemienności,

$$[R_i, P_j] = i\hbar\delta_{ij}. \quad (9)$$

Operator położenia fotonu \mathbf{R} , zdefiniowany poprzez moment energii (foton jest tam, gdzie jego energia) ma jednak istotną wadę: jego składowe są nieprzemienne. Jest to ogólna cecha relatywistycznej mechaniki kwantowej, występująca również dla cząstek obdarzonych masą, niemniej, można było sformułować zasadę nieoznaczoności [5], która określa granicę dokładności jednoczesnego pomiaru położenia i pędu fotonu,

$$\Delta\mathbf{R} \Delta\mathbf{P} \geq \frac{3}{2}\hbar\sqrt{1 + \frac{4\sqrt{5}}{9}}, \quad (10)$$

Wynik ten oznacza, że foton trudniej jest jednocześnie zlokalizować w przestrzeni położenia i w przestrzeni pędów w porównaniu z cząstkami nierelatywistycznymi.

4. Klasyczne pole elektromagnetyczne a kwantowa funkcja falowa fotonu

Pole elektromagnetyczne rozchodzące się w próżni (bez źródeł) opisane jest czterema wektorowymi funkcjami spełniającymi równania Maxwella

$$\partial_t \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t), \quad (11)$$

$$\partial_t \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (12)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (13)$$

oraz związki

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (14)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t). \quad (15)$$

W celu wyznaczenia relacji między klasycznym polem elektromagnetycznym a funkcją falową fotonu posłużymy się [2] wektorem Riemanna–Silbersteina $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2\epsilon_0}} + i \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\sqrt{2\mu_0}}. \quad (16)$$

Równania Maxwella wyrażone przez wektor Riemanna–Silbersteina (RS) redukują się do dwóch równań

$$i\partial_t \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = c\nabla \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (18)$$

gdzie c oznacza prędkość światła. Także energia i pęd pola elektromagnetycznego wyrażone przez wektor RS

mają prostą postać,

$$E = \int d^3r \left[\frac{\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{2\epsilon_0} + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{2\mu_0} \right] \\ = \int d^3r \mathbf{F}^*(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (19)$$

$$\mathbf{P} = c \int d^3r \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \\ = -i \int d^3r \mathbf{F}^*(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{F}(\mathbf{r}, t). \quad (20)$$

Rozwiązanie równań Maxwella można przedstawić w postaci transformaty Fouriera wektora RS czyli superpozycji fal monochromatycznych:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega). \quad (21)$$

Całkę tę można przedstawić w równoważnej postaci zawierającej całkowanie jedynie po dodatnich wartościach ω ,

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int_0^{\infty} d\omega [e^{-i\omega t} \mathbf{F}_+(\mathbf{r}, \omega) + e^{i\omega t} \mathbf{F}_-(\mathbf{r}, \omega)]. \quad (22)$$

Rozbicie całki Fouriera (21) na dwie części okaże się przydatne w dalszych rozważaniach. Oznaczenie drugiej części całki przez zespoloną sprzężoną funkcję $\mathbf{F}_-(\mathbf{r}, \omega)$ zostanie uzasadnione później. Pola wektorowe $\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega)$, na mocy równań Maxwella, spełniają równania

$$c\nabla \times \mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = \pm\omega \mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega). \quad (23)$$

Dla transformaty Fouriera $\tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega)$ względem współrzędnych przestrzennych,

$$\mathbf{F}_{\pm}(\mathbf{r}, \omega) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega), \quad (24)$$

równania (23) stają się układem trzech równań algebraicznych

$$i\mathbf{c}\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = \pm\omega \tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega). \quad (25)$$

Ze znikania dywergencji (18) wynika, że $\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = 0$ oraz, że rozwiązanie istnieje tylko wtedy gdy $\omega = c|\mathbf{k}|$. Rozwiązania równań (25) można przedstawić w postaci:

$$\tilde{\mathbf{F}}_{\pm}(\mathbf{k}, \omega) = A_{\pm} \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}) f_{\pm}(\mathbf{k}), \quad (26)$$

gdzie A_{\pm} są amplitudami określającymi natężenie fali, $f_{\pm}(\mathbf{k})$ są dowolnymi unormowanymi funkcjami, zaś zespolone wektory $\mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k})$ spełniają równanie

$$i\mathbf{c}\mathbf{k} \times \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}) = \pm\omega \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}). \quad (27)$$

Będziemy używać wektorów unormowanych według wzoru $\mathbf{e}_{\pm}^*(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k}) = 1$. Bez ograniczenia ogólności można przyjąć, że wektory $\mathbf{e}_{\pm}(\mathbf{k})$ spełniają związek $\mathbf{e}_{-}^*(\mathbf{k}) = \mathbf{e}_{+}(\mathbf{k})$, ponieważ równanie (27) i warunek unormowania wyznaczają te wektory z dokładnością do fazy. Fazę tę można zawsze przerzucić na dowolne funkcje $f_{\pm}(\mathbf{k})$.

Z przeprowadzonej powyżej analizy wynika, że ogólne rozwiązanie równań Maxwella jest następującą superpozycją monochromatycznych fal płaskich:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k}) \cdot [A_+ f_+(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + A_- f_-^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t}]. \quad (28)$$

Pole elektromagnetyczne spełniające równania Maxwella można zatem w pełni opisać podając dwie amplitudy A_\pm oraz dwie zespolone funkcje wektora falowego $f_\pm(\mathbf{k})$. Własności tych funkcji wynikają z kolei z własności pola elektromagnetycznego $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$. Przede wszystkim, można w ten sposób wyznaczyć własności transformacyjne tych funkcji. Przy translacji czasu $t \rightarrow t - t_0$ i przestrzeni $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ funkcje $f_\pm(\mathbf{k})$ zostają pomnożone przez czynniki fazowe,

$$f_\pm(\mathbf{k}) \rightarrow e^{i\omega t_0} f_\pm(\mathbf{k}), \quad f_\pm(\mathbf{k}) \rightarrow e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_0} f_\pm(\mathbf{k}). \quad (29)$$

Takim samym przekształceniom podlegają funkcje falowe fotonu. Przekształcenia funkcji $f_\pm(\mathbf{k})$ przy obrotach i szczególnych przekształceniach Lorentza, wynikające z własności transformacyjnych wektorów pola elektromagnetycznego, są również takie same jak dla funkcji falowych fotonu. Nie przypadkiem więc użyliśmy tych samych oznaczeń, gdyż własności transformacyjne funkcji falowych i współczynników w rozkładzie fourierowskim klasycznego pola elektromagnetycznego (28) są identyczne. Bezpośrednie powiązanie funkcji falowej fotonu z polem elektromagnetycznym jest matematycznym sformułowaniem *dualizmu korpuskularno-falowego*.

Monochromatyczne fale płaskie występujące w rozkładzie Fouriera (28) poza wektorem falowym i częstością charakteryzują się także polaryzacją. Jeżeli w tym rozkładzie występuje tylko jedna funkcja falowa prawoskrętnego lub lewoskrętnego fotonu, to pole elektromagnetyczne jest spolaryzowane kołowo lewoskrętnie lub prawoskrętnie.¹ Ogólny stan polaryzacji fali wymaga obecności obu składowych funkcji falowej. Pole elektryczne w takim przypadku dla monochromatycznej fali płaskiej ma postać ($A_\pm = 1$):

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re}[\mathbf{e}(\mathbf{k}) (f_+(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + f_-^*(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t})], \\ &= \text{Re}[\mathbf{e}(\mathbf{k}) (f_+(\mathbf{k}) + f_-(\mathbf{k})) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}]. \end{aligned} \quad (30)$$

Gdy oś z pokrywa się z kierunkiem \mathbf{k} , wektor $\mathbf{e}_\pm(\mathbf{k})$

można wybrać jako

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Parametry Stokesa (3) dane są wzorami [6, 7]:

$$\begin{aligned} S_0 &= |f_+|^2 + |f_-|^2, \quad S_1 = 2|f_+||f_-| \cos(\delta_- - \delta_+), \\ S_2 &= 2|f_+||f_-| \sin(\delta_- - \delta_+), \quad S_3 = |f_+|^2 - |f_-|^2, \end{aligned} \quad (32)$$

gdzie

$$f_+ = |f_+| e^{i\delta_+}, \quad f_- = |f_-| e^{i\delta_-}. \quad (33)$$

W ogólnym przypadku, gdy obie amplitudy f_\pm są różne od zera mamy polaryzację eliptyczną. Wektor pola elektrycznego zakreśla elipsę, której długości osi są wyznaczone przez $|f_\pm|$, zaś różnica faz określa orientację.

Z uwagi na to, że wektor RS jest związany z funkcjami falowymi fotonu transformatą Fouriera (28), można uważać go za odpowiednik *funkcji falowej fotonu w reprezentacji położeniowej*. Równanie (17) przyjmuje postać równania Schrödingera,

$$i\hbar \partial_t \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = H \mathbf{F}(\mathbf{r}, t), \quad (34)$$

gdzie

$$H = c \left(\mathbf{s} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right), \quad (35)$$

zaś \mathbf{s} są macierzami dla cząstek o spinie 1,

$$\mathbf{s} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}. \quad (36)$$

Hamiltonian H przypomina Hamiltonian Weyla H_W dla neutrin:

$$H_W = c \left(\boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{\hbar}{i} \nabla \right), \quad (37)$$

w którym zamiast \mathbf{s} występują macierze Pauliego.

Podobnie jak w równaniu Diraca, Hamiltonian H ma widmo rozciągające się od $-\infty$ do $+\infty$. Część wektora $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ o dodatnich energiach,

$$\Psi_+(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k}) f_+(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}, \quad (38)$$

interpretujemy jako funkcję falową fotonu prawoskrętnego, zaś część wektora $\mathbf{F}(\mathbf{r}, t)$ o ujemnych energiach, interpretujemy jako *zespolono sprzężoną* funkcję falową fotonu lewoskrętnego

$$\Psi_-(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}^*(\mathbf{k}) f_-(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}. \quad (39)$$

Tak więc wektor RS opisuje łącznie fotony prawoskrętne i lewoskrętne w przestrzeni położeniowej. Tak samo, jak

1. Skrętność fali jest odwrotna do skrętności fotonu ponieważ fale opisuje się z punktu widzenia obserwatora, który widzi nadbiegającą falę [6].

w reprezentacji pędowej funkcje falowe w reprezentacji położeniowej opisujące fotony prawoskrętne albo fotony lewoskrętne można ustawić w kolumnę albo zastąpić dwie funkcje jedną funkcją $\Psi(\mathbf{r}, t, \lambda)$ wprowadzając dodatkowy parametr λ .

5. Fotony – elementarne wzbudzenia kwantowego pola elektromagnetycznego

Energia pojedynczego fotonu dana jest wzorem: $E = 1.986 \times 10^{-25} \text{J/l}$, gdzie długość fali l mierzona jest w metrach. Dla długości fal występujących w życiu codziennym, od fal radiowych do fal rentgenowskich, jest to wielkość bardzo mała w porównaniu z typowymi energiami, z jakimi mamy do czynienia. Z tego powodu liczba fotonów w naszym otoczeniu jest ogromna. Ze Słońca na sekundę pada około 1000 dzuży energii na metr kwadratowy. W grubym przybliżeniu daje to 10^{18} fotonów. Kuchenka mikrofalowa produkuje około 10^{27} fotonów na sekundę. Wielki Wybuch wypełnił cały Kosmos fotonami, których gęstość obecnie wynosi średnio 400 na cm^3 . W tej sytuacji potrzebne jest sformułowanie, w którym nie koncentrujemy się na pojedynczym fotonie, ale potrafimy opisać też stany złożone z wielu fotonów.

Stan N fotonów opisany jest funkcją falową zależną od N zespołów parametrów opisujących fotony. W reprezentacji pędowej funkcja ta ma postać:

$$f(\mathbf{k}_1, \lambda_1; \mathbf{k}_2, \lambda_2; \dots; \mathbf{k}_i, \lambda_i; \dots; \mathbf{k}_N, \lambda_N; t). \quad (40)$$

Funkcja ta musi być funkcją symetryczną (nie zmieniać się przy zamianie każdej pary argumentów \mathbf{k}_i, λ_i i \mathbf{k}_j, λ_j) ponieważ fotony są bozonami.

W przypadku dużej liczby fotonów, a przede wszystkim w sytuacji nieokreślonej ich liczby, formalizm oparty na funkcji falowej zależnej o współrzędnych wszystkich fotonów jest wręcz niemożliwy do zastosowania. Zastępujemy go formalizmem opartym na *metodzie drugiej kwantyzacji* [8]. Metoda ta polega na zastąpieniu funkcji falowych operatorami anihilacji $a(\mathbf{k}, \lambda)$ zaś funkcji falowych zespolono sprzężonych operatorami kreacji $a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda)$. Z powodu relatywistycznej normalizacji funkcji falowych fotonu, w regułach komutacyjnych dla operatorów kreacji i anihilacji funkcję delta należy pomnożyć przez k ,

$$[a(\mathbf{k}, \lambda), a^\dagger(\mathbf{k}', \lambda')] = \delta_{\lambda\lambda'} k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (41)$$

Po podstawieniu operatorów anihilacji i kreacji fotonu do wzoru (28) w miejsce funkcji falowych fotonu otrzymujemy operator pola elektromagnetycznego w postaci:

$$\hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}, t) = \sqrt{\hbar c} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^{3/2}} \mathbf{e}(\mathbf{k}) \cdot [a(\mathbf{k}, +) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t} + a^\dagger(\mathbf{k}, -) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\omega t}]. \quad (42)$$

Fotony w tym formalizmie są wzbudzeniami (kwantami) tego pola. Amplitudy A_\pm kwantowego operatora pola dobraliśmy w ten sposób ($A_\pm = \sqrt{\hbar c}$), aby otrzymać poprawny wzór na operator energii \hat{H} (Hamiltonian) pola elektromagnetycznego (19) wyrażony przez operator gęstości liczby fotonów w przestrzeni pędów $N(\mathbf{k})$,

$$N(\mathbf{k}) = a^\dagger(\mathbf{k}, +) a(\mathbf{k}, +) + a^\dagger(\mathbf{k}, -) a(\mathbf{k}, -), \quad (43)$$

$$\hat{H} = \int \frac{d^3 k}{k} \hbar \omega N(\mathbf{k}). \quad (44)$$

W wyniku traktowania *całego pola elektromagnetycznego* (a nie pojedynczych fotonów) jako układu kwantowego możemy znacznie rozszerzyć przestrzeń stanów. W odróżnieniu od przestrzeni stanów N -fotonowych zawierającej funkcje falowe (40), rozszerzona przestrzeń, zwana przestrzenią Focka, zawiera stany o dowolnej liczbie fotonów. Przestrzeń tę można obrazowo przedstawić w postaci odwróconej piramidy (45).

$$\begin{aligned} & \dots\dots\dots \\ & a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2) a^\dagger(\mathbf{k}_3, \lambda_3) a^\dagger(\mathbf{k}_4, \lambda_4) |0\rangle \\ & a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2) a^\dagger(\mathbf{k}_3, \lambda_3) |0\rangle \\ & a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2) |0\rangle \\ & a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle \\ & |0\rangle \end{aligned} \quad (45)$$

“Wierzchołek” tej piramidy to stan próżni $|0\rangle$, zaś n -ty poziom, opisujący stany n -fotonowe, jest generowany przez działanie n operatorów kreacji. Ogólny stan (czyli) kwantowego pola elektromagnetycznego $|\Psi\rangle$ jest kombinacją liniową wektorów bazy Focka,

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle = & f_0 + \sum_{\lambda_1} \int \frac{d^3 k_1}{k_1} f_1(\mathbf{k}_1, \lambda_1) a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) |0\rangle \\ & + \sum_{\lambda_1, \lambda_2} \int \frac{d^3 k_1}{k_1} \frac{d^3 k_2}{k_2} f_2(\mathbf{k}_1, \lambda_1; \mathbf{k}_2, \lambda_2) \\ & \cdot a^\dagger(\mathbf{k}_1, \lambda_1) a^\dagger(\mathbf{k}_2, \lambda_2) |0\rangle + \dots \end{aligned} \quad (46)$$

Wśród tych stanów szczególną rolę odgrywają *stany koherentne*, które dobrze opisują światło wysyłane przez lasery. Są to superpozycje stanów o różnej liczbie takich samych fotonów,

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{coh}}\rangle & = e^{-\langle N \rangle / 2} \left(|0\rangle + \frac{\langle N \rangle^{1/2}}{1!} a_f^\dagger |0\rangle + \frac{\langle N \rangle}{2!} (a_f^\dagger)^2 |0\rangle + \dots \right) \\ & = e^{-\langle N \rangle / 2} \exp(\langle N \rangle^{1/2} a_f^\dagger) |0\rangle, \end{aligned} \quad (47)$$

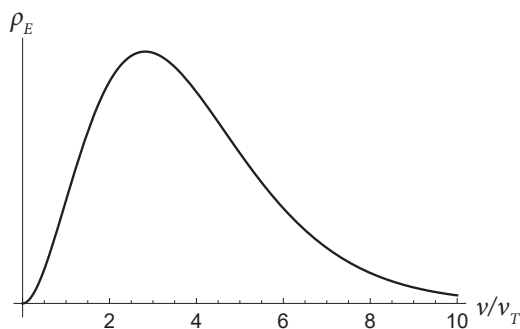
gdzie a_f^\dagger jest operatorem kreacji fotonu o funkcji falowej $f(\mathbf{k}, \lambda)$,

$$a_f^\dagger = \sum_s \int \frac{d^3 k_1}{k} f(\mathbf{k}, \lambda) a^\dagger(\mathbf{k}, \lambda), \quad (48)$$

$\langle N \rangle$ zaś jest średnią liczbą fotonów w tym stanie. Stany koherentne kwantowego pola elektromagnetycznego są łącznikiem między teorią kwantową i klasyczną. Średnia wartość operatora pola elektromagnetycznego (42) w stanie koherentnym odtwarza wzór (28), w którym amplituda zależy od natężenia (średniej liczby fotonów) stanu koherentnego $A = \sqrt{\langle N \rangle \hbar c}$. Ze stanami koherentnymi mamy więc do czynienia zawsze tam, gdzie klasyczne pole elektromagnetyczne daje poprawny opis promieniowania. Dotyczy to przede wszystkim fal używanych w telekomunikacji. Niezerowa średnia wartość pola w stanie koherentnym jest wynikiem superpozycji stanów o różnej liczbie fotonów. W stanie o określonej liczbie fotonów średnie pole jest zawsze równe zero.

Nie wszystkie stany pola elektromagnetycznego, z którymi mamy na co dzień do czynienia są stanami czystymi. Nie można w ten sposób opisać promieniowania rozgrzanych ciał. Do opisu takiego promieniowania trzeba użyć stanów mieszanych. Stany te reprezentują zbiory fotonów o różnych wektorach falowych. Żaden kierunek tych wektorów nie jest wyróżniony, zaś gęstość energii $\rho_E(\nu)$ takiego promieniowania zależy od temperatury źródła i opisana jest wzorem Plancka [9],

$$\begin{aligned} \rho_E(\nu) &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1} \\ &= \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \left(\exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right) + \exp\left(-2\frac{h\nu}{k_B T}\right) \right. \\ &\quad \left. + \exp\left(-3\frac{h\nu}{k_B T}\right) + \dots \right). \end{aligned} \quad (49)$$



Rys. 3. Uniwersalny kształt krzywej Plancka. Gęstość energii promieniowania (w dowolnych jednostkach) w funkcji bezwymiarowej częstości $\nu_T = k_B T/h$

Szereg zbudowany z czynników Boltzmannia $e^{-E_n/k_B T}$, gdzie E_n jest wielokrotnością energii $h\nu$, doskonale ilustruje tezę Plancka, że promieniowanie składa się z porcji (kwantów) energii. Gęstość (49) dąży do zera zarówno dla dużych jak i dla małych częstości (rys. 3). Położenie maksimum² jest liniową funkcją temperatury, $\nu_{\text{Max}} = 2.82 k_B T/h$. Całkowita gęstość energii dana jest

wzorem:

$$\int_0^\infty d\nu \rho_E(\nu) = \frac{8\pi^5 h c}{15} \left(\frac{k_B T}{h c} \right)^4. \quad (50)$$

Gęstość energii różni się od gęstości fotonów $\rho_N(\nu)$ jedynie o czynnik $h\nu$ a zatem całkowita gęstość dana jest wzorem:

$$\int_0^\infty d\nu \rho_N(\nu) = 16\pi \zeta(3) \left(\frac{k_B T}{h c} \right)^3. \quad (51)$$

gdzie $\zeta(3) = 1.202$ jest wartością funkcji zeta Riemanna. Temperatura kosmicznego promieniowania tła wynosi 2.7 K, co oznacza, że całkowita gęstość wynosi 400 fotonów na centymetr sześcienny, zaś $\nu_{\text{Max}} = 159$ GHz. Temperatura powierzchni Słońca wynosi 5778 K. Całkowita gęstość fotonów słonecznych jest więc prawie dziesięć miliardów razy większa, zaś maksimum leży w zakresie widzialnym.

Literatura

- [1] Iwo Białynicki-Birula i Zofia Białynicka-Birula, *Quantum Electrodynamics*, Pergamon Press Oxford - PWN Warszawa (1975), dostępna pod adresem <http://www.cft.edu.pl/birula/>
- [2] Iwo Białynicki-Birula i Zofia Białynicka-Birula, The role of the Riemann-Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism, *J. Phys. A: Math. Theor.* **46**, 053001 (2013).
- [3] Iwo Białynicki-Birula i Zofia Białynicka-Birula, Quantum numbers and spectra of structured light, *Phys. Scr.* **93**, 104005 (2018).
- [4] Eugene P. Wigner, On unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, *Ann. of Math.* **40**, 149 (1939).
- [5] Iwo Białynicki-Birula i Zofia Białynicka-Birula, Quantum numbers and spectra of structured light, *Phys. Scr.* **93**, 104005 (2018).
- [6] John D. Jackson *Classical Electrodynamics* 3rd ed., Wiley New York 1999, p. 301.
- [7] Iwo Białynicki-Birula, Helicity amplitudes, polarization of EM waves and Stokes parameters: classical versus quantum theory, *J. Opt.* **21**, 094002 (2019).
- [8] Leonard I. Schiff, *Mechanika Kwantowa*, PWN Warszawa 1977, rozdz. 14.
- [9] Max Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspectrum, *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gessellschaft* **2** 237 (1900).

2. Często przedstawia się gęstość energii promieniowania w funkcji długości fali, a nie w funkcji częstości. Wówczas położenie maksimum funkcji $\rho_E(\lambda)$ przesuwa się w kierunku większych częstości (krótszych fal) o czynnik 1.76.