

POSTĘPY FIZYKI

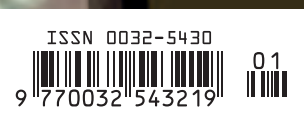


CZASOPISMO NAUKOWE POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO
POŚWIĘCONE UPOWSZECHNIANIU WIEDZY FIZYCZNEJ

1 / 2021
TOM 72



nr indeksu 369721





POLSKIE TOWARZYSTWO FIZYCZNE (PTF)

www.ptf.net.pl

ZARZĄD GŁÓWNY

Leszek Sirko (prezes)
Bogdan Kowalski (sekretarz generalny)
Jan Grabski (skarbnik)
Katarzyna Chałasińska-Macukow
Dariusz Grech
Bohdan Grządkowski
Zbigniew Kąkol
Stanisław Kistryn
Mirośław Łoś
Maiej Maśka
Beata Agnieszka Pietrewicz
Józef Spałek
Aneta Szczygielska
Andrzej Ślebarski
Zbigniew Trybuła

BIURO ZARZĄDU

ul. Pasteura 5
02-093 Warszawa
tel. (+22) 553 28 56 pok.4.56 (4. piętro)
e-mail: biuro@ptf.net.pl

PRZEWODNICZĄCY ODDZIAŁÓW

Krzysztof Szymański (Białystok)
Adam Gadomski (Bydgoszcz)
Ewa Mandowska (Częstochowa)
Jarosław Rybicki (Gdańsk)
Adam Míchczyński (Gliwice)
Paweł Zajdel (Katowice)
Małgorzata Wysocka-Kunisz (Kielce)
Józef Spałek (Kraków)
Jerzy Żuk (Lublin)
Karol Jakub Jędrzejczak (Łódź)
Ewa Pawelec (Opole)
Henryk Drozdowski (Poznań)
Gaweł Żyła (Rzeszów)
Mirośław Brozis (Słupsk)
Mariusz P. Dąbrowski (Szczecin)
Michał Pawlak (Toruń)
Aneta Drabińska (Warszawa)
Ewa Dębowska (Wrocław)
Van Cao Long (Zielona Góra)

POSTĘPY FIZYKI (PF)

CZASOPISMO NAUKOWE POLSKIEGO TOWARZYSTWA FIZYCZNEGO
POŚWIĘCONE UPOWSZECHNIANIU WIEDZY FIZYCZNEJ

www.ptf.net.pl

czasopismo ukazuje się od 1949 roku

RADA REDAKCYJNA

Andrzej Kajetan Wróblewski (przewodniczący)
Mieczysław Budzyński
Witold Dobrowolski
Henryk Drozdowski
Józef Spałek
Józef Szudy
Arkadiusz Wójs

KORESPONDENCI ODDZIAŁÓW PTF

Wojciech Olszewski (Białystok)
Beata A. Pietrewicz (Bydgoszcz)
Piotr Gębara (Częstochowa)
Tomasz Wąsowicz (Gdańsk)
Lucyna Grządziel (Gliwice)
Aleksandra Piórkowska-Kurpas (Katowice)
Maciej Rybczyński (Kielce)
Witold Zawadzki (Kraków)
Janusz Filiks (Lublin)
Janusz Kuliński (Łódź)
Katarzyna Książek (Opole)
Sławomir Mamica (Poznań)
Jacek Fal (Rzeszów)
Agnieszka Włodarkiewicz (Słupsk)
Janusz Typek (Szczecin)
Michał Pawlak (Toruń)
Grzegorz Siudem (Warszawa)
Bernard Jancewicz (Wrocław)
Lidia Najder-Kozdrowska (Zielona Góra)

REDAKCJA

Anna Szemberg (redaktor naczelna)
Krzysztof Turzyński
Redakcja „Postępy Fizyki” – Wydział Fizyki UW
Pasteura 5, pok. 2.80 (2. piętro), 02-093 Warszawa
e-mail: postepy.fizyki@gmail.com

INFORMACJE DLA AUTORÓW

Przyjmujemy do publikacji przystępnie napisane artykuły przeglądowe i monograficzne w języku polskim i angielskim, które otrzymują pozytywne recenzje wydawnicze. Teksty należy przysyłać e-mailem na adres: postepy.fizyki@gmail.com w formie przyjętej w czasopiśmie www.ptf.net.pl/pl/postepy-fizyki/ w systemie LATEX (plik źródłowy + pdf) lub w programie Word; tekst powinien zawierać afiliację i nr ORCID autora, streszczenie i słowa kluczowe w j. polskim oraz j. angielskim, bibliografię wyłącznie załącznikową, podpisy do ilustracji; **ilustracje** mogą być zamieszczone w tekście, ale **należy** je również **przysłać w osobnych plikach** o rozdzielczości co najmniej 300 dpi; w **przypadku ilustracji zapożyczonych** z innych źródeł, podpis musi zawierać źródło pochodzenia ilustracji, przy czym na autorze spoczywa obowiązek uzyskania zgody na jej publikację w jego artykule w *Postęпах Fizyki*. Redakcja zastrzega sobie prawo do skracania i redagowania tekstów w tym wprowadzania niezbędnych zmian terminologicznych. Zgodnie z obowiązującym prawem autorskim autorzy będą mogli dokonać korekty autorskiej artykułu przygotowanego do druku. Opublikowanie artykułu w PF wiąże się z nieodpłatnym udostępnieniem go na stronie internetowej PTF na podstawie licencji Creative Commons.

PRENUMERATA

W 2020 roku **cena brutto pojedynczego numeru PF wynosi 29,70 PLN** (w tym 8% VAT), **rocznika (4 numery) (z 9% bonifikatą) – 108,00 PLN** (w tym 8% VAT). Wpłatę na konto należy powiększyć o koszty przesyłki, które wynoszą dla jednego zeszytu 7,00 PLN (w tym 23% VAT). Przy zamawianiu większej liczby egzemplarzy prosimy koszty wysyłki skonsultować e-mailowo z wydawcą. **Cena pojedynczego archiwalnego numeru PF** pozostaje bez zmian – **12,00 PLN brutto** + koszty wysyłki. Szczegółowe warunki prenumeraty PF znaleźć można na stronie internetowej PTF (www.ptf.net.pl/).

ISSN 0032-5430, ISSN 2658-2422 (online)

© Copyright by Polskie Towarzystwo Fizyczne

Wydawca: Polskie Towarzystwo Fizyczne



Dofinansowano z programu *Spółeczna odpowiedzialność nauki*
Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego

**Kwartalnik POSTĘPY FIZYKI jest wydawany we współpracy
z WYDZIAŁEM FIZYKI UNIwersytetu warszawskiego**

Szanowni Czytelnicy,

zapraszamy do lektury pierwszego numeru 72 tomu PF, który otwierają trzy bardzo interesujące artykuły wyróżnione w Konkursie PTF (2020) na najlepszy artykuł autorstwa młodego fizyka zgłoszony do PF. Komunikat o wynikach Konkursu znajduje Państwo w PF 3/2021 oraz na stronie PTF: <https://www.ptf.net.pl/pl/aktualnosci/informacje-biezace/wyniki-konkursu/>

Serdeczne gratuluję Wyróżnionym w imieniu PTF, Jurorów Konkursu oraz Redakcji PF.

W stałym cyklu przekładów wykładów noblowskich z dziedziny fizyki proponujemy tym razem dwa wykłady laureatów nagrody Nobla z 2016 roku. Tak się złożyło, że tematyka jednego z wyróżnionych w Konkursie PTF artykułów nawiązuje do odkryć właśnie tych noblistów. Wspominamy zmarłą pod koniec ubiegłego roku dr Magdalene Staszal, która przez 30 lat była członkinią Redakcji naszego czasopisma. Reklama na czwartej stronie okładki przypomina środowisku polskich fizyków o jubileuszu prof. Michała Hellera.

UWAGA

PF są dostępne bezpłatnie w wersji elektronicznej na stronie internetowej PTF numery bieżące PF <http://www.ptf.net.pl/pl/towarzystwo/dzialalnosc/postepy-fizyki/> numery archiwalne PF

<http://www.ptf.net.pl/pl/towarzystwo/dzialalnosc/postepy-fizyki/roczniki/>

NOWOŚĆ

Spis treści PF (od 1949)

https://www.ptf.net.pl/pl/postepy_fizyki/baza-pf/

INFORMACJE DLA AUTORÓW PF znaleźć można na stronie internetowej PTF

https://www.ptf.net.pl/media/cms_page_media/1544/Wskazowki.pdf

redaktor naczelna PF



Magda Staszal
(graf. Krzysztof Petelczyc)

„Ostry metal”, czyli od piorunochronu do oddziaływania światło–materia w pikownikach K. M. Czajkowski	2
Försterowski rezonansowy transfer energii (FRET) — podstawy fizyczne i zastosowania A. M. Kotulska	8
Dziedzictwo Edwina Halla A. Krzyżewska	16
Defekty topologiczne i przemiany fazowe J. M. Kosterlitz	23
Topologiczna materia kwantowa F. D. M. Haldane	32
Magdalena Staszal	46

„Ostry metal”, czyli od piorunochronu do oddziaływania światło–materia w pikownękach

Krzysztof M. Czajkowski

Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski*

Streszczenie. Światło jest dla nas cennym źródłem informacji o świecie, który nas otacza niezależnie od skali dzięki temu, że oddziałuje ono z materią. Jednym z wyzwań naukowych XXI wieku bez wątpienia jest kształtowanie tego oddziaływania. W niniejszym artykule przedstawię metodę realizacji silnego sprzężenia światło–materia, jaką jest zastosowanie wnęk optycznych, z uwzględnieniem intrygującego przypadku pikownek plazmonicznych, czyli tytułowych „ostrych metali”.
Słowa kluczowe: nanotechnologia, wnęki rezonansowe, optyka, oddziaływanie światło–materia

Abstract. Light is a valuable source of information of the surrounding world as a consequence of light–matter interactions. One of the major challenges in contemporary science is shaping those interactions. In this article, I present a method of reaching strong light–matter coupling regime using optical cavities with special focus on the case of plasmonic picocavities, which are formed by sharp metallic features.

Keywords: nanotechnology, resonant cavities, optics, light–matter interactions

1. Wstęp

Światło jest dla nas cennym źródłem informacji o świecie, który nas otacza, niezależnie od rozmiarów badanych obiektów dzięki temu, że oddziałuje ono z materią. Codziennie dokonujemy różnych obserwacji z tym związanych np. dostrzegamy zielony kolor trawy czy błękit nieba. Podobnie przebiegają eksperymenty w laboratoriach badawczych. Dysponujemy spektrometrami mierzącymi widmo (rozumiane jako zależność natężenia od długości fali) światła podczerwonego absorbowanego przez cząsteczki wody czy związków organicznych, co pozwala określić, w jaki sposób drgają te cząsteczki i zidentyfikować ich budowę chemiczną na tej podstawie. Mamy też gigantyczne teleskopy, które dostarczają wiedzy o tym, z jakich pierwiastków składają się gwiazdy poprzez badanie emitowanego przez nie światła. Te niezwykle obserwacje są możliwe właśnie dzięki oddziaływaniu światła z materią. Jednym z wyzwań naukowych XXI wieku bez wątpienia jest wykorzystanie tego oddziaływania w praktyce. Z jednej strony w nadchodzącej dobie informatyki kwantowej potrzebujemy źródeł światła umożliwiających badania eksperymentalne nad optyką kwantową, z drugiej zaś strony chcemy jeszcze lepiej wykorzystywać światło do gromadzenia wiedzy o własnościach materii i jej oddziaływaniu ze światłem w nanoskali, gdzie rządzą reguły dyk-

towane przez mechanikę kwantową. W artykule przedstawię metodę kształtowania oddziaływania, jaką jest zastosowanie wnęk optycznych, uwzględniając intrygujący przypadek pikownek plazmonicznych, tj. „ostrych metali”.

Aby zrozumieć, czym jest wnęka optyczna i w jaki sposób jej użycie pomaga we wzmocnieniu oddziaływania światła z materią, należy najpierw zrozumieć złotą regułę Fermiego, którą można bez wątpienia nazwać „regułą kciuka” dla oddziaływania światło–materia w nanoskali. W tym celu rozpatrzmy szczególny efekt tego oddziaływania jakim jest emisja spontaniczna. Jest to proces przejścia ze stanu wzbudzonego cząsteczki lub kropki kwantowej (tj. nanocząstki półprzewodnikowej będącej wydajnym emitorem światła) do niższego stanu energetycznego, któremu towarzyszy wyemitowanie różnicy energii w formie światła. Złota reguła Fermiego określa prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu między dwoma stanami układu kwantowego (materii w postaci np. cząsteczki czy kropki kwantowej) w wyniku oddziaływania ze światłem i wyraża się wzorem (uwaga dla czujnych fizyków: stosuję tu sformułowanie złotej reguły Fermiego, w przybliżeniu dipolowym, przy założeniu, że zaburzeniem jest fala elektromagnetyczna) [1]

*ORCID: 0000-0001-9106-2837

$$\gamma = \rho(\omega) |\vec{d} \cdot \vec{E}(\vec{r}_{emitter})|^2 \quad (1)$$

gdzie γ to prawdopodobieństwo przejścia na jednostkę czasu, ρ to gęstość stanów fotonowych dla częstotliwości światła pobudzającego równej ω na jednostkę objętości, \vec{d} to moment dipolowy związany z przejściem, zaś \vec{E} to natężenie pola elektrycznego światła pobudzającego w położeniu cząsteczki (\vec{r}_{emiter}).

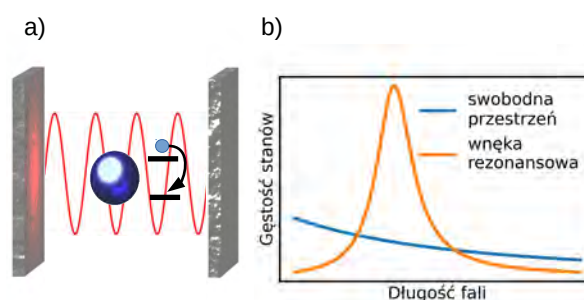
Za główną obserwację związaną ze złotą regułą Fermiego należy uznać to, że prawdopodobieństwo emisji zależy nie tylko od właściwości samej materii, z którą oddziałuje światło, ale również od właściwości otoczenia, które należy ukształtować w taki sposób, aby umożliwić zatrzymanie światła we wnęcie jak najdłużej (tzw. przekrycie widmowe) oraz by pole w miejscu emitera było maksymalnie wzmocnione (tzw. przekrycie przestrzenne). Ten pierwszy warunek stosunkowo łatwo spełnić używając pary lusterek (rys. 1a). Jest to najprostszy przykład optycznej wnęki rezonansowej, czyli przyrządu służącego do wzmocniania oddziaływania światło–materia. Zastosowanie wnęk rezonansowych pozwala na kształtowanie zarówno natężenia pola, jak i gęstości stanów. O ile natężenie pola elektrycznego to intuicyjna wielkość i łatwo sobie wyobrazić, jak np. zwierciadło wklęsłe skupia światło na niewielkich obszarach zwiększając w ten sposób natężenie pola, tak gęstość stanów, szczególnie w odniesieniu do światła, jest wielkością nieintuicyjną.

Światło rozchodzące się swobodnie na dużym obszarze posiada określoną gęstość stanów wynikającą z kwantowej natury światła. Wnęki rezonansowe zwiększają gęstość stanów dla konkretnych częstotliwości poprzez ograniczenie możliwości propagacji fal niespełniających zadanych warunków. Dobrym przykładem jest drgająca struna. W jej punktach zaczepienia wytworzona fala musi mieć zerową wartość przemieszczenia (tzw. węzeł), co nakłada warunek na częstotliwość takiej fali. Podobnie, zerowe natężenie pola elektrycznego znajduje się na granicy powietrza i zwierciadła. Układ złożony z dwóch zwierciadeł w analogii do zaczepionej w dwóch punktach struny umożliwia rozchodzenie się między zwierciadłami światła wyłącznie o określonych częstotliwościach. Jeśli jedna z tych częstotliwości pokrywa się z energią przejścia emitera, mamy do czynienia ze zwiększonym prawdopodobieństwem emisji w myśl złotej reguły Fermiego. Foton (pojedynczy kwant światła), który trafi do wnęki może odbić się od jednego ze zwierciadeł, a następnie przemieścić się do drugiego zwierciadła i odbić od niego. I tak w nieskończoność, przynajmniej w teorii. W praktyce nawet znakomite zwierciadła z pewnym prawdopodobieństwem absorbują lub (rzadziej) przepuszczają światło, co sprawia, że światło opuszcza wnękę, co obniża gęstość stanów i poszerza zakres dopuszczalnych częstotliwości światła (rys. 1b).

W uproszczeniu miarą sprzężenia światło–materia jest czynnik

$$F = \frac{\omega_0}{\sqrt{V}\Gamma}, \quad (2)$$

w którym oprócz położenia ω_0 oraz szerokości widmowej rezonansu Γ (odwrotnie proporcjonalnej do czasu życia fotonu we wnęcie) rolę odgrywa tzw. objętość modowa V , która jest tym mniejsza im bardziej skoncentrowane jest pole elektryczne. Warto nadmienić, że to właśnie ta ostatnia wielkość sprawia, że naukowcy dążą do wytwarzania wnęk o niewielkich rozmiarach i silnie skupionym polu elektrycznym.



Ryc. 1. Schematyczna reprezentacja oddziaływania światło–materia we wnękach rezonansowych: a) w molekułę (niebieskiej sferze) zachodzi przejście ze stanu wzbudzonego do podstawowego skutkujące emisją spontaniczną światła utrzymywanego we wnęcie, b) gęstość stanów optycznych jest zwiększona w pobliżu długości fali spełniającej warunek rezonansu (poszerzenie widmowe wynika ze strat we wnęcie)

Mimo tego, że we wnękach rezonansowych następują straty energii, eksperymentalnie możliwe jest uzyskanie nadzwyczaj długiego czasu od pojawienia się do „ucieczki” fotonu z wnęki — około 130 ms. Pozornie to krótko, ale światło jest bardzo szybkie (odległość, którą przebędzie w tym czasie foton, to około 40 tys. km, czyli ponad 6 razy większa od promienia Ziemi). W praktyce jest to dostatecznie długo, by wykonać w tym czasie wiele intrygujących eksperymentów związanych z kwantową naturą światła. Poprzez oddziaływanie światła z atomami umieszczonymi we wnęcie możliwe jest badanie kwantowego stanu, w jakim znajduje się światło i obserwowanie procesu dekoherencji, czyli utraty informacji o kwantowym stanie światła w wyniku jego oddziaływania z otoczeniem. Badania te zostały nagrodzone w roku 2012 nagrodą Nobla z fizyki [2]. Składające się na nie eksperymenty prowadzone były w ekstremalnych warunkach, m.in. zwierciadła wnęki wykonane były z nadprzewodnika, temperatura zaś, w jakiej je wykonano, była istotnie poniżej 1 kelwina. Jedną z silnych motywacji do dalszych badań jest zatem obserwacja efektów kwantowych w warunkach bliższych pokojowym.

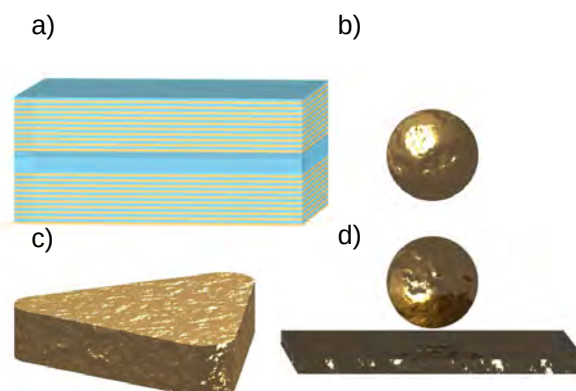
2. Półprzewodnikowe wnęki rezonansowe i ich zastosowania

Podstawowy element klasycznych wnęk rezonansowych stanowią zwierciadła. Typowe zwierciadła optyczne są wykonane z cienkiej warstwy metalu umieszczonej na szklanym podłożu i odbijają około 95% światła. Nowoczesne techniki wytwarzania cienkich warstw pozwalają na uzyskanie grubości nawet kilku nanometrów dla wielu materiałów półprzewodnikowych. Z cienkich warstw takich materiałów możliwe jest uzyskanie tzw. zwierciadeł Bragga (ang. *distributed Bragg reflector*, DBR), które dla wąskiego zakresu długości fali wykazują współczynnik odbicia powyżej 99% (rys. 2a). Wnęki optyczne złożone z pary zwierciadeł DBR rozdzielonej cienką warstwą półprzewodnika, tzw. mikrownęki stanowiły i nadal stanowią źródło niezwykle ciekawych eksperymentów związanych z oddziaływaniem światło–materia.

Mikrownęki mogą posłużyć do kształtowania procesu emisji pod względem wydajności i rozkładu kątownego emitowanego promieniowania, co sprawia, że są stosowane jako elementy źródeł światła np. laserów. Szczególnym przykładem są wydajne źródła pojedynczych fotonów, które są niezbędne do realizacji eksperymentów związanych z optyką kwantową. Takie źródła cechuje to, że w odróżnieniu od np. emisji termicznej z wolframowego drutu żarówki w danej chwili czasu emitowany jest co najwyżej jeden foton. Pozwala to na badanie kwantowych właściwości światła. Standardowe źródła pojedynczych fotonów wykorzystują zjawisko spontanicznej parametrycznej konwersji w dół (ang. *spontaneous downconversion*, SPDC). Ich wadą jest niska wydajność emisji, a zaletą — że jest to dobrze poznana technologia, emitować zaś można również splątane pary fotonów. Alternatywą może być użycie kropek kwantowych, które cechuje niezwykle wysoka wydajność, ale problemem jest to, że emisja z kropek kwantowych następuje izotropowo (identycznie dla każdego kąta obserwacji). Umieszczenie kropki w mikrowniecie skutkuje istotnym wzmocnieniem wydajności ekstrakcji światła, ale uzyskanie splątanego stanu wymaga użycia pary mikrownęk w formie słupków, dla których możliwe jest kształtowanie procesu emisji poprzez rozmiar słupków i ich wzajemną odległość [3].

Innym przykładem zastosowania mikrownęk jest wytwarzanie układów optycznych imitujących zachowania złożonych układów kwantowych występujących w fizyce ciała stałego. W tym roku polscy naukowcy zaprezentowali układ wykorzystujący mikrownękę, w którym zachowanie polaryzacji światła przypomina oddziaływanie spin–orbita [4]. Wewnątrz mikrownęki umieścili oni ciekły kryształ, który jest materiałem o dwujłom-

ności zmienianej przykładanym do komórki ciekłokrystalicznej napięciem. Dwujłomność polega na tym, że współczynnik załamania światła zależy od polaryzacji światła padającego na dany materiał. Wykorzystując polaryzację światła jako analog spinu elektronu udało się odtworzyć hamiltoniany Raaschby–Dresselhausa i Zeemana. Te badania mogą w przyszłości pozwolić na lepsze zrozumienie układów kwantowych cechujących się oddziaływaniem spin–orbita.



Ryc. 2. Wnęki rezonansowe omówione w niniejszej pracy: a) półprzewodnikowe zwierciadło Bragga, b) złota nanosfera, c) złoty nanoprzyzmat, d) nanosfera nad zwierciadłem

3. Od piorunochronu do oddziaływania światło–materia w pikownękach

Mikrownęki wzmacniają oddziaływanie światła z materią głównie ze względu na niezwykle małe straty. Dal-
sze zwiększenie tego oddziaływania wymaga manipulacji parametrem V w równaniu 2, czyli objętością modową, co nie jest łatwe w przypadku mikrownęk. Jako alternatywne rozwiązanie zaproponowano nanocząstki z metali szlachetnych, które są zdolne do skupiania światła na obszarach dużo mniejszych niż długość fali światła widzialnego sprawiając, że objętości modowe są dużo mniejsze niż w mikrownękach (rys. 2b-d).

W uproszczeniu modelem nanocząstki może być mała sfera umieszczona w stałym polu elektrycznym. Prosty model matematyczny opisujący nanocząstkę z metalu pokazuje, że szerokość rezonansu w widmie ekstynkcji światła (ekstynkcja to suma natężeń światła rozproszonego i zaabsorbowanego przez nanocząstkę) zależy, w przybliżeniu, głównie od materiału — na podstawie danych eksperymentalnych dla srebra można pokazać, że szerokość rezonansu to około 200 meV. Dla porównania, w mikrownękach można uzyskać wartości wynoszące poniżej 1 meV. Sferyczne nanocząstki cechują się zbyt dużymi objętościami modowymi, aby można było zaobserwować silne sprzężenie światło–materia. Doprowadziło to do poszukiwania metalicznych wnęk rezonansowych o znacznie mniejszych

objętościach modowych, które cechuje strukturyzacja w skali pojedynczych atomów.

Metale odróżnia od półprzewodników to, że mają dużą koncentrację tzw. swobodnych elektronów. Mają one tendencję do ekranowania objętości przewodnika, czyli gromadzenia się elektronów na powierzchni i w konsekwencji niwelowania pola elektrycznego wewnątrz. Elektrony na powierzchni odpychają się od siebie. To powoduje, że potencjał pola elektrycznego jest taki sam w każdym punkcie powierzchni, co minimalizuje całkowitą energię potencjalną przewodnika i sprawia, że właściwości elektromagnetyczne metalu (czy w ogólności przewodnika) silnie zależą od kształtu powierzchni. Klasycznym przykładem wykorzystania tego efektu jest powszechnie używany piorunochron. Jako prosty model piorunochronu posłuży nam układ składający się z dwóch kul przewodnika o różnych rozmiarach, połączonych cienkim drutem (rys. 3a). Jest to model zaczerpnięty z wykładów Feynmana [5]. Potencjał elektryczny na powierzchni sfery wynosi

$$\phi_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{4\pi\epsilon_0 r_1}, \quad (3)$$

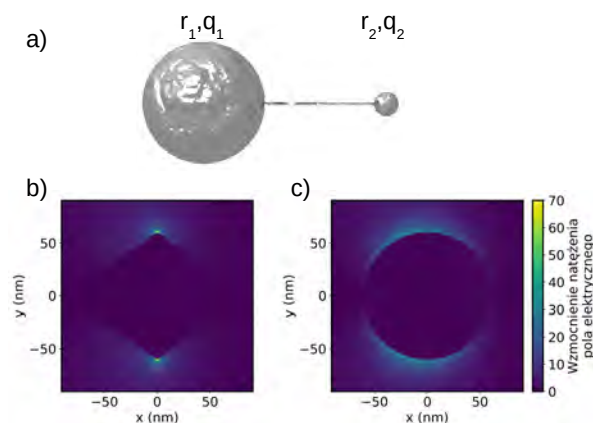
gdzie q to ładunek zgromadzony na sferze, r to promień sfery. Ze względu na to, że sfery są połączone drutem ich potencjał musi być identyczny ($\phi_1 = \phi_2$), co prowadzi do równania

$$\frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}. \quad (4)$$

Natężenie pola elektrycznego na powierzchni sfer wyraża się wzorem $E_{1,2} = \frac{q_{1,2}}{4\pi\epsilon_0 r_{1,2}^2}$, co prowadzi do tego, że stosunek natężeń wynosi $\frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1}{r_2}$. A zatem im mniejszy promień małej sfery tym większy stosunek natężeń. W efekcie, gdy powierzchnia metalu posiada ostre krawędzie, pole elektryczne jest silnie wzmocnione w ich obszarze. W szczególności, jest tym większe im mniejszy jest charakterystyczny rozmiar zaostrenia. Natężenie pola elektrycznego jest miarą tendencji danego obszaru do przyciągania ładunku podczas wyładowania atmosferycznego. Sprawia to, że piorun trafia dokładnie w piorunochron. Jeśli jest on uziemiony, to zgromadzony ładunek zostanie bezpiecznie odprowadzony. To rozumowanie tylko pozornie nie ma związku z oddziaływaniem światło–materia. Stanowi ono elementarny argument za tym, że zastosowanie struktur metalowych o elementach rzędu pojedynczych nanometrów pozwala na uzyskanie silnych wzmocnień pola potrzebnych, zgodnie ze złotą regułą Fermiego i czynnikiem Purcella, do silnego oddziaływania światła z materią pomimo stosunkowo dużej szerokości rezonansów. Potwierdzają to symulacje metodą różnic skończonych w dziedzinie czasu przedstawione na rys. 3b–c. Wzmocnienie natężenia pola jest znacznie większe w przypadku

złotego oktaedru posiadającego ostre krawędzie niż na powierzchni gładkiej sfery o tym samym rozmiarze i z tego samego materiału.

Ten efekt został wykorzystany do zbadania sprzężenia światło–materia w układzie złożonym z nanopryzmatu ze złota i barwników (agregatów J) [6]. Obserwowany czynnik F rzędu $10^6 \text{ nm}^{-3/2}$ jest bardzo dobrym wynikiem w porównaniu z wnękami rezonansowymi wykorzystującymi DBR [6]. Okazało się, że choć eksperyment był prowadzony w warunkach pokojowych udało się zaobserwować rozszczepienie piku emisyjnego cząsteczki na dwa, co nazywamy rozszczepieniem Rabiego. Jest to efekt tzw. silnego sprzężenia światło–materia, w którym światło we wnęce wymienia z materią energię szybciej niż zachodzi proces ucieczki światła z wnęki. Prowadzi to do licznych zjawisk wynikających z tego, że w tej sytuacji cały układ wykazuje kolektywne zachowanie tzn. jak gdyby stanowił jedną cząstkę (taki sprzężony układ nazywamy w fizyce kwazicząstką). Niezwykły przykład takiego zjawiska stanowi kondensacja Bosego-Einsteina tak powstałych kwazicząstek [7].



Ryc. 3. a) Schemat przedstawiający eksperyment myślowy Feynmana obrazujący efekt piorunochronu; b), c) przestrzenny rozkład wzmocnienia pola elektrycznego dla oktaedru i sfery (odpowiednio) wykonanych ze złota, oświetlonych światłem o rezonansowej długości fali (ok. 550 nm). Zaostrome brzegi oktaedru cechuje znacznie większe wzmocnienie niż obserwowane na powierzchni sfery

Ekstremalnie wysokie czynniki F (równanie 2) można uzyskać stosując nanocząstkę umieszczoną około nanometr ponad metalowym zwierciadłem. Światło rozproszone przez nanocząstkę po trafieniu na zwierciadło wraca do nanocząstki, która rozprasza je ponownie. W efekcie wielokrotnego rozpraszania pole elektryczne między nanocząstką i zwierciadłem jest dużo większe niż byłoby bez obecności zwierciadła. Praktyczna realizacja takiego układu nastąpiła w 2014, a wyniki zostały opublikowane w czasopiśmie *Nature* [8]. Trudno jest nie docenić spektakularności opisanego w artykule eksperymentu. Autorzy potrafią w sposób wytworzalny wytwarzać struktury, w których nanocząstki

o rozmiarach rzędu 40 nm ze złota oddzielone są od warstwy złota o grubości 70 nm warstwą cząsteczek o grubości 0,9 nm. Kluczową częścią eksperymentu jest ściśle określenie liczby i orientacji cząsteczek umieszczonych we wnętrzu. W tym celu wykorzystuje się osiągnięcia chemii makromolekularnej. Jeśli cząsteczka barwnika (błękitu metylenowego, znanego maturalistom z chemii) umieszczona jest w cząsteczce makrocyclicznej, to orientuje się wzdłuż osi łączącej nanocząstkę i lustro, w przeciwnym razie orientacja jest pozioma (wzdłuż warstwy). Cząsteczka makrocycliczna jest tak dobrana, aby pomieścić tylko jedną cząsteczkę barwnika. Dzięki temu zmyślnemu eksperymentowi udało się pokazać nie tylko obecność silnego sprzężenia światło–materia w temperaturze pokojowej, ale również pokazać przewidywaną przez model Jaynesa–Cummingsa zależność między siłą sprzężenia a liczbą cząsteczek we wnętrzu.

4. Zastosowania wnęk metalicznych

Wzmocnione oddziaływania światło–materia dają niezwykle możliwości badania materii w nanoskali. Na samym początku artykułu wspominałem o tym, że cząsteczki cechują charakterystyczne energie drgań. Do badania tych drgań stosowane jest zjawisko rozpraszania Ramana polegające na nieelastycznym rozpraszaniu światła, w którym zmiana energii następuje w wyniku pobudzenia cząsteczek do drgań. Od lat znany jest efekt polegający na wzmocnieniu tego rozpraszania ramanowskiego, gdy cząsteczki umieszczone są na chropowatej powierzchni metalu.

W przypadku zastosowania nanownęki metalicznej można uzyskać tak silne wzmocnienie, że możliwe jest uzyskanie widma ramanowskiego pochodzącego od pojedynczej cząsteczki. Niezwykły przykład stanowi pomiar nici RNA wykonany metalową zaostrzoną sondą skanującą [9]. Otrzymane widma ramanowskie w różnych położeniach sondy względem nici pozwalają na określenie sekwencji zasad nukleotydowych w nici.

Podobne badania z rozdzielczością czasową i przestrzenną udało się wykonać również w opisanym wyżej układzie złożonym z nanocząstki na zwierciadle. Przy tej okazji naukowcom udało się zaobserwować zaskakujące zjawisko. Za pomocą światła laserowego wytworzyli struktury na powierzchni metalowej cząstki o charakterystycznych rozmiarach porównywalnych z rozmiarem atomu złota [10]. Stosując niską temperaturę (na poziomie 10 K) udało im się ustabilizować tak powstałe struktury i zmierzyć widma ramanowskie cząsteczek znajdujących się w ich pobliżu. Zupełnie jak w przypadku piorunochronu obecność dodatkowej struktury na czubku metalowej sfery pozwala znacząco zwiększyć wzmocnienie pola w obrębie cząsteczki i zlokalizować

światło w objętościach mniejszych niż 1 nm^3 . Dzięki tym właściwościom możliwa jest obserwacja tego, jak zależą drgania cząsteczki od jej położenia względem pikownki, które mierzone są z dokładnością do pojedynczych nanometrów. W konsekwencji obserwuje się ruch pojedynczych atomów złota tworzących pikownkę pod wpływem światła lasera. Analiza różnych procesów chemicznych z wykorzystaniem tego układu pozwala na badanie zmiany długości wiązań czy procesów utleniania i redukcji w czasie rzeczywistym na poziomie pojedynczych cząsteczek [11]. Ponadto analiza teoretyczna wykazała, że jakościowo przedstawiony tu elektrostatyczny model piorunochronu przewiduje liczne właściwości pikownek [11].

5. Podsumowanie

Zastosowanie mikro- i nanownek pozwala na badanie kwantowej natury światła, materii oraz wzajemnego oddziaływania światła i materii z niespotykaną dotąd dokładnością, a także w reżimie silnego sprzężenia, który nie był dotychczas łatwo dostępny eksperymentalnie. Granice tych badań istotnie przesuwają zastosowanie nanostruktur metalicznych, które dzięki silnej lokalizacji pola elektromagnetycznego przekraczają możliwości standardowych struktur półprzewodnikowych. Zaawansowane wykorzystanie prostego efektu, jakim jest dodatkowa lokalizacja pola na zaostrzonych powierzchniach metali, pozwoliło na realizację niezwykle ciekawych eksperymentów związanych z chemicznymi i fizycznymi właściwościami cząsteczek. Można przypuszczać, że takie metaliczne struktury nadal będą źródłem ciekawej fizyki związanej z oddziaływaniem światło–materia, a w przyszłości również zastosowań np. w analizie chemicznej czy optyce kwantowej.

Literatura

- [1] Lukas Novotny, Bert Hecht. *Principles of Nano-Optics*. Cambridge University Press, 2006.
- [2] Materiały komitetu noblowskiego: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2012/press-release/>
- [3] Adrien Dousse, Jan Suffczyński, Alexios Beveratos, Olivier Krebs, Aristide Lemaître, Isabelle Sagnes, Jacqueline Bloch, Paul Voisin, and Pascale Senellart. Ultrabright source of entangled photon pairs. *Nature*, 416(7303):217–220, 2010.
- [4] Katarzyna Rechcińska, Mateusz Król, Rafał Mazur, Przemysław Morawiak, Rafał Mirek, Karolina Łempicka, Witold Bardyszewski, Michał Matuszewski, Przemysław Kula, Wiktor Piecek, Pavlos G. Lagoudakis, Barbara Piętka, Jacek Szczytko. Engineering spin-orbit synthetic hamiltonians in liquid-

- crystal optical cavities. *Science*, 366(6466):727–730, 2019.
- [5] Richard Feynman. *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2 of *The Feynman Lectures on Physics*. Addison-Wesley, Boston 1963.
- [6] Gülis Zengin, Martin Wersäll, Sara Nilsson, Tomasz J. Antosiewicz, Mikael Käll, Timur Shegai. Realizing strong light-matter interactions between single-nanoparticle plasmons and molecular excitons at ambient conditions. *Phys. Rev. Lett.*, 114:157401, Apr 2015.
- [7] J. Kasprzak, M. Richard, S. Kundermann, A. Baas, P. Jeambrun, J. M. J. Keeling, F. M. Marchetti, M. H. Szymańska, R. André, J. L. Staehli, V. Savona, P. B. Littlewood, B. Deveaud, Le Si Dang. Bose–Einstein condensation of exciton polaritons. *Nature*, 443(7110):409–414, 2006.
- [8] Rohit Chikkaraddy, Bart de Nijs, Felix Benz, Steven J. Barrow, Oren A. Scherman, Edina Rosta, Angela Demetriadou, Peter Fox, Ortwin Hess, Jeremy J. Baumberg. Single-molecule strong coupling at room temperature in plasmonic nanocavities. *Nature*, 535(7610):127–130, 2016.
- [9] Elena Bailo, Volker Deckert. Tip-enhanced raman spectroscopy of single rna strands: Towards a novel direct-sequencing method. *Angewandte Chemie Int. Ed.*, 47(9):1658–1661, 2008.
- [10] Felix Benz, Mikolaj K. Schmidt, Alexander Dreismann, Rohit Chikkaraddy, Yao Zhang, Angela Demetriadou, Cloudy Carnegie, Hamid Ohadi, Bart de Nijs, Ruben Esteban, Javier Aizpurua, Jeremy J. Baumberg. Single-molecule optomechanics in “picocavities”. *Science*, 354(6313):726–729, 2016.
- [11] Jeremy J. Baumberg, Javier Aizpurua, Maiken H. Mikkelsen, David R. Smith. Extreme nanophotonics from ultrathin metallic gaps. *Nature Materials*, 18(7):668–678, 2019.

Försterowski rezonansowy transfer energii (FRET) — podstawy fizyczne i zastosowania

Agata M. Kotulska

Instytut Niskich Temperatur i Badań Strukturalnych Polskiej Akademii Nauk*

Streszczenie. Försterowski rezonansowy transfer energii (FRET) jest jednym ze zjawisk fizycznych, które znalazły szerokie zastosowanie w biologii i przyczyniły się do zrozumienia funkcjonowania żywych komórek na poziomie molekularnym. Zmiany efektywności transferu energii wraz ze zmianą wzajemnej odległości donora i akceptora są widoczne podczas pomiarów spektroskopowych czasów życia luminescencji lub widma emisji. Zjawisko to umożliwia badanie wielu procesów takich jak hybrydyzacja DNA, zmiany konformacji białek czy też reakcji wiązania się przeciwciała z antygenem. Tradycyjnie do tego celu stosuje się barwniki organiczne lub białka fluorescencyjne. Jednak ze względu na ich wady, takie jak słabo rozdzielone, szerokie pasma absorpcyjne i emisyjne, krótkie — nanosekundowe czasy życia fluorescencji poziomów energetycznych czy fotowysyblanie, nadal poszukuje się alternatywnych fluoroforów wykazujących pożądane cechy spektroskopowe. Rozwiązaniem dla napotykanymi niepożądanymi właściwościami spektroskopowymi barwników organicznych jest zastosowanie nanokryształów domieszkowanych jonami lantanowców jako donorów energii. Takie nanomateriały wykazują wysoką fotostabilność luminescencji, wąskie spektralnie pasma absorpcji i emisji, emisję antystokesowską oraz długie czasy zaniku luminescencji. W artykule przedstawiono podstawy fizyczne zjawiska FRET oraz zaprezentowano nowe wyzwania dla nanoluminoforów domieszkowanych jonami lantanowców, jako nowych alternatywnych donorów energii do studiowania procesów FRET.

Słowa kluczowe: FRET, försterowski rezonansowy transfer energii, nanokryształy, barwniki organiczne, lantanowce, linijka spektroskopowa

Abstract. Förster Resonance Energy Transfer (FRET) is the physical phenomena that has found wide application in biology and contributed to understanding the functioning of living cells at the molecular level. Changes in the energy transfer efficiency are associated with the change of distance between the donor and acceptor, are visible during spectroscopic measurements, such as luminescence lifetimes or emission spectra. This phenomenon enables the study of many processes such as DNA hybridization, changes in protein conformation or the binding reaction of an antibody to an antigen. Traditionally, organic dyes or fluorescent proteins are used for this purpose. However, due to their disadvantages, such as poorly separated, wide absorption and emission bands, short nanosecond luminescence lifetimes, and photobleaching, alternative fluorophores with the desired spectroscopic characteristics are still being sought. The solution to the encountered imperfections of organic dyes is the use of nanocrystals doped with lanthanide ions as energy donors. This kind of nanomaterials show high luminescence photostability, narrow spectral absorption and emission bands, anti-Stokes emission and long luminescence decay times. This article presents the physical basis of the FRET phenomenon and new challenges for lanthanide-doped nanoluminophores as new alternative energy donors for researches in FRET processes.

Keywords: FRET, Förster resonance energy transfer, nanocrystals, organic dyes, lanthanides ions, spectroscopic ruler

1. Wstęp

Mechanizm försterowskiego rezonansowego transferu energii (ang. *Förster Resonance Energy Transfer*, FRET) wykorzystuje bezpromienisty rezonansowy przekaz energii pomiędzy dwoma molekułami — donorem (D) i akceptorem (A). Efektywność mechanizmu FRET silnie i monotonicznie zależy od odległości między tymi molekułami. Zmiany efektywności transferu energii FRET można zarejestrować za pomocą statycznych pomiarów widm fluorescencji albo badania kinetyki fluorescencji, mierząc czasy zaniku luminescencji D oraz D w obecności A . Monotoniczna zmiana efektywności

transferu energii umożliwia pomiar odległości z precyzją subnanometrową (efektywność transferu jest odwrotnie proporcjonalna do 6. potęgi odległości pomiędzy D i A) [1, 3]. Efektywność transferu FRET silnie zależy również od doboru pary molekuł donora–akceptora. Obserwacja zjawiska FRET jest możliwa po spełnieniu kilku podstawowych warunków — pasma emisji donora oraz absorpcji akceptora muszą się spektralnie nakładać, a dodatkowo odległość między molekułami nie może przekraczać 10 nm, umożliwiając tym samym transfer energii pomiędzy D i A [3]. Interakcja pomiędzy dwoma molekułami w zjawisku FRET jest opisywana jako oddziaływanie dipol–dipol (które defi-

*ORCID: 0000-0001-6335-9537, e-mail: a.kotulska@intibs.pl

niuje prawdopodobieństwo transferu energii pomiędzy dwoma dipolami elektrycznymi).

Mechanizm FRET pomiędzy jonami lantanowców a barwnikami organicznymi

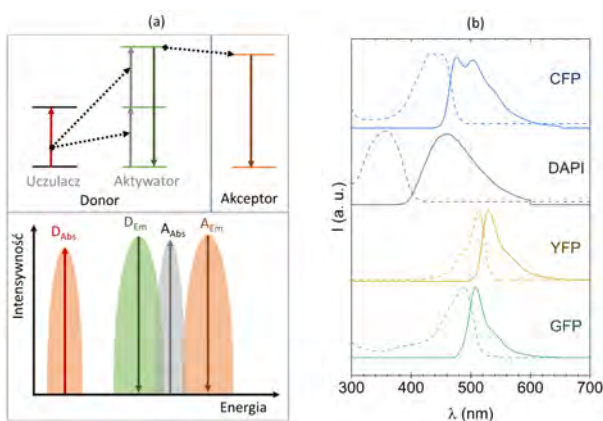
Fundamenty umożliwiające zrozumienie fizycznej natury rezonansowego bezpromienistego transferu energii położył w 1946 roku Theodor Förster [4, 5]. Przedstawił matematyczny model opisujący migrację energii pomiędzy molekułami (dwoma oscylatorami mechanicznymi posiadającymi ładunek elektryczny), analizując zmiany intensywności oraz czasy zaników luminescencji związane z odległością pomiędzy D i A [4, 5, 6]. Na podstawie wcześniejszych obserwacji właściwości transferu energii pomiędzy molekułami, Förster przedstawił równania opisujące krytyczną odległość, poniżej której może zachodzić transfer energii między donorem i akceptorem. Odległość tę można wyznaczyć na podstawie widm luminescencji oraz stężenia fluoroforów, co bardzo dobrze zgadzało się z już wcześniej obserwowanymi wynikami eksperymentalnymi właściwości transferów energii pomiędzy atomami [7, 8]. Przegląd początkowo opracowanych technik FRET został opublikowany w 1959 roku [9]. Mimo, że od opublikowania tych teoretycznych prac upłynęło już kilkadziesiąt lat i rozwinięte zostały opisy teoretyczne zjawisk transferów energii [10, 11], a technika ta stała się wygodnym i powszechnie stosowanym narzędziem, nadal poszukiwane są nowe barwniki fluorescencyjne, które powinny ułatwić interpretację procesów biologicznych *in vitro* i *in vivo*, a w konsekwencji zrozumienie funkcjonowania żywych komórek i organizmów. Dodatkowo rozwijany jest aparat matematyczny umożliwiający korekcję licznych niepożądanymi właściwościami spektroskopowych wynikających ze stosowania barwników organicznych [12] oraz powstają nowe narzędzia i techniki pomiarowe mające dostarczyć wniosków ilościowych (dotyczących np. odległości czy też efektywności transferu energii).

W tradycyjnym obrazowaniu lub detekcji z wykorzystaniem zjawiska FRET, jako molekuły D i A stosowane są barwniki organiczne. Charakteryzują się one wysokimi wartościami współczynnika ekstynkcji, co umożliwia wydajne wzbudzenie donora i efektywny transfer energii do akceptora [13]. Mnogość barwników organicznych [14, 15] umożliwia prowadzenie skomplikowanych biologicznych eksperymentów, na przykład współbarwienia struktur biologicznych w celu wizualizacji położenia jądra lub szkieletu ciała komórki [16]. Niestety barwniki organiczne (np. CFP, DAPI, YFP, GFP itd.), ulegają fotowysbieleniu, co oznacza, że pod wpływem oświetlenia światłem laserowym następuje ich szybka fotodegradacja [17, 18]. Dodatkowo, dozwolony charakter

przebieg, prowadzący do wydajnej emisji w tych związkach, odpowiada za krótkie czasy zaniku fluorescencji (rzędu nanosekund), co komplikuje techniczną stronę pomiaru. W barwnikach organicznych obserwuje się też pasma absorpcji w zakresie krótkofalowym widma. W przypadku złożonych próbek biologicznych bardzo często obserwuje się niepożądaną fluorescencję tła (autofluorescencję), gdyż wiele molekuł organicznych budujących nasze komórki (np. DNA, FAD, NADH, kolagen, elastyna) ma pasma wzbudzenia i wykazuje spontaniczną fluorescencję w zakresie widzialnym [17, 18]. Niestety, barwniki organiczne mają również inne wady, takie jak szerokie, nachodzące na siebie widma absorpcji i emisji, które często prowadzą do przekazania energii określanego jako „przeciekanie” sygnału (przykładowo emisja donora jest bezpośrednio rejestrowana w kanale detekcyjnym akceptora, albo linia wzbudzająca donora wzbudza bezpośrednio molekuły akceptora) i konieczności korygowania tych wad [12, 18, 19]. Właściwości spektroskopowe barwników organicznych zależą również od chemicznego i biologicznego otoczenia molekuły, co utrudnia ilościowe pomiary FRET. Te wszystkie cechy zmuszają do poszukiwania alternatywnych materiałów eliminujących wady barwników, a jedną z propozycji jest stosowanie nanokryształów domieszkowanych lantanowcami.

Badanie właściwości spektroskopowych dla jonów Ln^{3+} wykorzystuje zjawisko luminescencji. Polega to na optycznym wzbudzeniu badanego materiału za pomocą energii wiązki laserowej, a następnie transferze energii w sposób radiacyjny (emisja fali elektromagnetycznej w zakresie UV, VIS, NIR) lub na drodze nieradiacyjnej [20]. Dużym atutem nanokryształów domieszkowanych jonami lantanowców jest ich wysoka fotostabilność, wąskie linie absorpcyjne i emisyjne oraz długie czasy zaniku poziomów energetycznych [17]. Długie czasy życia luminescencji poziomów energetycznych wynikają z zabronionej regułą Laporte'a przejścia wewnątrz powłoki f [17, 20]. Stabilność emisji lantanowców jest spowodowana obecnością jonów Ln^{3+} , gdyż elektrony zajmujące orbitale $4f$, odpowiadające za właściwości optyczne, są ekranowane przed wpływem chemicznego otoczenia przez zapełnione orbitale $5s$ i $5p$ [21]. W najprostszym przypadku, opisu poziomów energetycznych oraz zachodzących możliwych procesów transferów energii między nimi, rozpatruje się dwa poziomy energetyczne: podstawowy oraz wzbudzony. Bogata struktura poziomów energetycznych w jonach lantanowców (Ln^{3+}) umożliwia obserwację wielu przejść i procesów wymiany energii, niespotykanych w innych związkach [22]. Współdomieszkowanie nanokryształów dwoma różnymi jonami lantanowców, gdzie jeden z nich pełni rolę uczulacza (wzbudzanego świa-

tłem laserowym), natomiast drugi jest aktywatorem (wzbudzany za pomocą konwersji energii z uczulacza w górę, czyli na wyższy poziom), dodatkowo poszerza możliwości wyboru długości fal wzbudzenia oraz emisji. Szczególnie korzystna jest emisja antystokesowska, gdyż do wzbudzenia używane jest światło z zakresu bliskiej podczerwieni, a emisja następuje w zakresie widzialnym. Przykładem takiego procesu jest właśnie konwersja energii w górę (ang. *upconversion*). Następuje w ten sposób eliminacja wysokiego sygnału autofluorescencji tła, co jest szczególnie pożądane przy obrazowaniu struktur biologicznych. Odpowiedni wybór jonu, długości fali wzbudzenia oraz emisji umożliwia wpasowanie się w transmisyjne okna biologiczne dla tkanek — są to obszary wykazujące niższy współczynnik absorpcji, a tym samym większą głębokość penetracji światłem, niższy sygnał tła i w konsekwencji wyższą czułość takich metod pomiarowych [17]. W jonach Ln^{3+} , oprócz typowej absorpcji ze stanu podstawowego (GSA, ang. *Ground-State Absorption*), obserwuje się również wydają absorpcję ze stanu wzbudzonego (ESA, ang. *Excited State Absorption*), relaksację krzyżową (CR, ang. *Cross-Relaxation*) lub bardzo wydajny transfer energii w górę (ETU, ang. *Energy Transfer Upconversion*) [17, 21]. Struktura elektronowa lantanowców jako grupy pierwiastków jest szczególnie przydatna w badaniach spektroskopowych. Schemat mechanizmu FRET pomiędzy donorem w postaci nanokryształu, a organicznym barwnikiem jako akceptorem, został przedstawiony na rys. 1a, natomiast widma absorpcji i emisji wybranych barwników organicznych na rys. 1b.

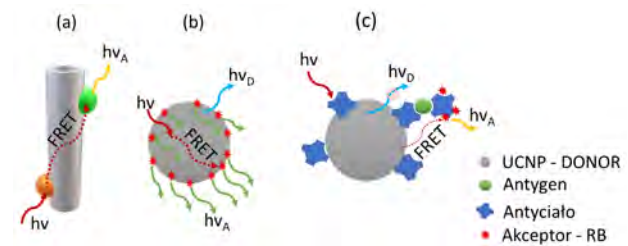


Rys. 1. (a) Schemat wzbudzenia donora (nanokryształu) oraz schemat mechanizmu FRET [34]; (b) przykładowe widma absorpcji i luminescencji barwników organicznych [14]

Zastosowania

Czasy zaników dla D maleją wraz ze skracaniem się odległości D - A do rzędu kilku nanometrów, co umożliwia zastosowanie zjawiska FRET do badań zachowania struktur biologicznych i efektów w nich występujących,

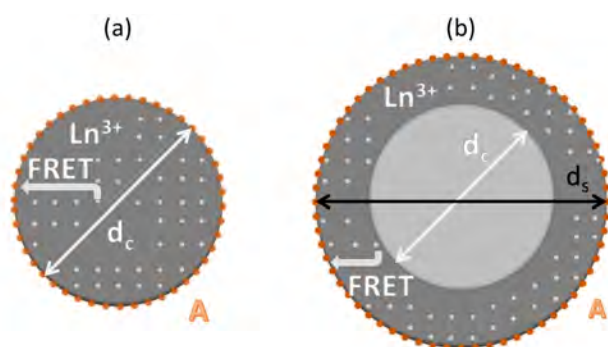
takich jak hybrydyzacja DNA [23, 24], badania konformacji białek [25] czy wykonywanie testów immunoenzymatycznych [25–27]. W konsekwencji zjawisko FRET znajduje liczne zastosowania w biologii oraz wykazuje duży potencjał dla zastosowań w diagnostyce medycznej [19], na przykład do rejestracji oddziaływań molekularnych w żywych komórkach [29–31], czy też przy przeprowadzeniu homogenicznych diagnostycznych testów biologicznych [32]. Jednym z najbardziej zaawansowanych narzędzi w biologii, umożliwiającym rejestrowanie zjawiska FRET w mikroskopii fluorescencyjnej, jest metoda FLIM (ang. *Fluorescence Lifetime Imaging Microscopy*), która umożliwia wizualizację procesów biologicznych w czasie rzeczywistym za pomocą czasów zaników [18]. Na rysunku 2a zostały przedstawione schematycznie badania struktury DNA za pomocą zjawiska FRET, gdzie molekula (D) dołączona do jednej z zasad kwasu DNA jest pobudzana energią dostarczoną za pośrednictwem światła laserowego, a następnie przekazuje energię drugiej molekule (A) dołączonej do innej części DNA lub do komplementarnego fragmentu nici DNA. Na rysunku 2b został przedstawiony schemat stosowanych układów z nanokryształami jako donorami oraz barwnikami organicznymi jako akceptorami. Celem obecnie prowadzonych badań opisywanego zjawiska jest wykorzystanie FRET w naukach biologicznych, gdzie do donora, mającego postać nanokryształu domieszkowanego lantanowcami zostanie dołączony antygen ze specyficznymi przeciwciałami (rys. 2c). Taki test pozwala wykrywać obecność antygenów lub mierzyć aktywności enzymów.



Rys. 2. Przykładowe zastosowania zjawiska FRET w biologii: (a) schemat hybrydyzacji DNA [24]; (b) schemat mechanizmu wzbudzenia nanokryształu oraz zjawiska FRET pomiędzy nanokryształem a barwnikiem [27]; (c) schematyczne przedstawienie wzbudzenia donora (nanokryształu) skoniugowanego z antygenem ze specyficznymi przeciwciałami oraz barwnikiem jako akceptorem [27]

Nanokryształy domieszkowane jonami Ln^{3+} , pomimo posiadanych zalet, jednocześnie stawiają kolejne nowe wyzwania, wymagające optymalizacji i dogłębnego zrozumienia procesu transferu pomiędzy jonami lantanowców w nanokryształe a barwnikiem na jego powierzchni. Podczas projektowania czujników biologicznych występuje niepożądany efekt uboczny, polegający na zwiększeniu odległości D - A , będący konsekwencją biofunkcjonalizacji nanokryształów, która jest

niezbędna do uzyskania możliwości obserwacji reakcji biologicznych. Dodatkowo pojedynczy nanokryształ może posiadać wiele (rzędu setek lub tysięcy) jonów lantanowców, z których każdy może pełnić funkcję donora FRET. Jednak jednorodne domieszkowanie całej objętości nanokryształu powoduje, że jony te znajdują się w różnej odległości od powierzchni i znajdujących się tam akceptorów. W celu wyeliminowania tych niepożądanych cech, utrudniających realizację testów biologicznych z wykorzystaniem FRET, należałoby zwiększyć efektywność transferu FRET i czułość takich sond przez zoptymalizowanie architektury i składu chemicznego (rozmieszczenia aktywnych domieszek) nanokryształów.



Rys. 3. Architektura nanokryształów wpływa na dystrybucję jonów Ln^{3+} (jako donorów) oraz ich średnią odległość od akceptorów znajdujących się na powierzchni. W celu optymalizacji architektury nanokryształów pod kątem największej efektywności transferu energii między jonami a barwnikiem, można zweryfikować i zoptymalizować średnie odległości pomiędzy D i A . Analizowane architektury pod kątem transferu energii to: (a) domieszkowany rdzeń (o średnicy d_c) do nanokryształów; (b) rdzeń-płaszcz (o średnicy rdzenia d_c oraz średnicy płaszczka d_s). Umieszczając domieszki jonów D w powłoce zmniejsza się efektywną odległość D - A (r_{DA}) [33].

Architektura typu rdzeń-płaszcz daje możliwości różnorodnej dystrybucji jonów uczulacza oraz aktywatora w nanokryształach [33], umożliwiając wprowadzenie zmian i optymalizację właściwości luminescencyjnych D oraz zwiększenie efektywności transferu do A . Rozwiązaniem trudności napotykanym podczas obserwacji zjawiska FRET pomiędzy D i A , z wykorzystaniem nanokryształów domieszkowanych jonami lantanowców, jest optymalizacja architektury oraz ich składu chemicznego. W celu zwiększenia efektywności transferu energii z D (jony Ln^{3+}) do A (barwniki organiczne), należy rozmieścić jony domieszki w równomiernej i niewielkiej odległości od powierzchni — optymalnie zbliżonej do odległości Förstera R_0 . W tym celu zamiast nanokryształu, w którym jony domieszki znajdują się w całej objętości (rys. 3a), można wykorzystać nanokryształy postaci rdzeń-płaszcz. W takim rozwiązaniu domieszka spełniająca rolę donora powinna znaleźć się tylko w zewnętrznym płaszczu, dzięki czemu znajduje się efektywnie bliżej powierzchni niż w przypadku jednorodnie domieszkowanego nanokryształu

(rys. 3b). W następstwie tego średnia odległość pomiędzy jonami Ln^{3+} efektywnie się zmniejsza. Liczba jonów domieszki Ln^{3+} może być zmieniana przez intencjonalną zmianę koncentracji lub kontrolowanie grubości płaszczka. W konsekwencji zmianie ulega objętość, w której znajdują się jony Ln^{3+} , zgodnie z równaniem $d_s - d_c < d_c$, gdzie d_s to średnica płaszczka, a d_c to średnica rdzenia.

2. Parametry wpływające na efektywność FRET

Wyznaczenie wartości efektywności rezonansowego niepromienistego transferu energii pomiędzy dwoma molekułami (η) umożliwia obliczenie odległości pomiędzy dwoma molekułami (r_{DA}) ze wzoru:

$$\eta_{FRET} = 1 + \left(\frac{r_{DA}}{R_0} \right)^6. \quad (1)$$

Na wartość efektywności transferu energii wpływają także takie parametry jak: dystans Förstera (R_0 – wzór 2), współczynnik orientacji molekuł (κ), współczynnik załamania światła (n), całka przekrywania (część wspólna widma emisji D i widma absorpcji A) (J – wzór 3), wydajność kwantowa fluorescencji donora (ϕ_D) oraz liczba Avogadra (N_A). Aby było możliwe zaobserwowanie FRET, musi istnieć część wspólna widma emisji donora i widma absorpcji akceptora, a jest to odwzorowane przez całkę przekrywania emisji donora i absorpcji akceptora J . Dodatkowo, odległość między molekułami nie może przekraczać kilku nanometrów, co jest zdeterminowane odległością Förstera R_0 .

- R_0 — odległość, przy której dla danej pary D - A efektywność transferu energii jest równa 50%. Wartość tego parametru jest w pierwszym przybliżeniu stała dla każdej pary D - A . W zależności od rzeczywistej odległości (r_{DA}) pomiędzy molekułami zmienia się efektywność transferu zgodnie ze wzorem 1. Odległość Förstera wyznacza się za pomocą równania:

$$R_0 = \left(\frac{(9 \ln 10) \cdot \phi_D \cdot \kappa^2 \cdot J(\lambda)}{128 \cdot \pi^5 \cdot N_A \cdot n^4} \right)^{\frac{1}{6}}, \quad (2)$$

gdzie N_A jest liczbą Avogadra równą $6.02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

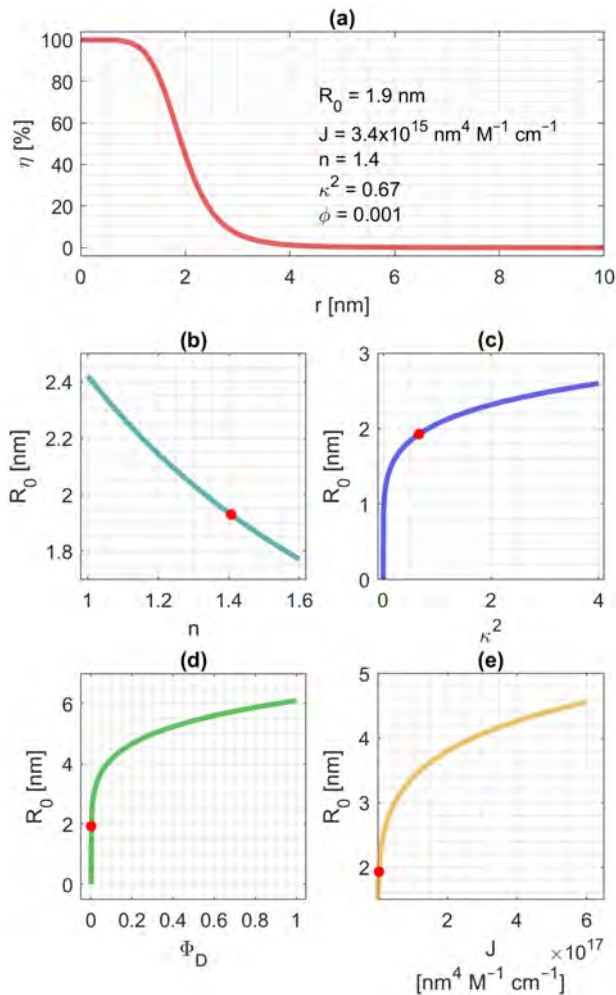
- κ — współczynnik orientacji molekuł. W zależności od kąta pomiędzy ustawieniem dipola donora D względem dipola akceptora A , wartość efektywności transferu energii może się zmieniać wraz ze zmianą κ^2 w zakresie od 0 do 4. Dla większości przypadków nieuporządkowanych molekuł κ^2 przyjmuje się stałą wartość równą $2/3$ (dla równoległych molekuł κ^2 przyjmuje wartość między 1 a 4, dla prostopadłych $\kappa^2 = 0$).

- n — współczynnik załamania światła ośrodka, w którym znajdują się D i A .
- J — całka przekrywania emisji donora i absorpcji akceptora jest wyznaczana jako całka znormalizowanego widma emisji donora oraz współczynnika ekstynkcji akceptora, pomnożonego przez czwartą potęgę długości fali. Wielkość ta jest opisana wzorem:

$$J = \int f_D(\lambda) \varepsilon_A(\lambda) \lambda^4 d\lambda, \quad (3)$$

gdzie f_D jest znormalizowanym widmem fluorescencji donora, $f_D(\lambda) = F_D / \int F_D(\lambda) d\lambda$, F_D zaś jest widmem fluorescencji donora w funkcji długości fali λ .

- ϕ_D — wydajność kwantowa donora, opisująca ile fotonów zostało wyemitowanych w stosunku do fotonów zaabsorbowanych (n_E/n_A).



Rys. 4. (a) Efektywność transferu FRET (η) w zależności od odległości D - A ; wartość odległości Förstera w funkcji parametrów fizycznych: (b) współczynnika załamania światła (n), (c) orientacji molekuł (κ), (d) wydajności kwantowej fluorescencji donora (ϕ_D), (e) całki przekrywania emisji donora i absorpcji akceptora (J) [34].

Podane powyżej zależności są obliczone w przybliżeniu makroskopowym. Do dalszych analiz dla pojedyn-

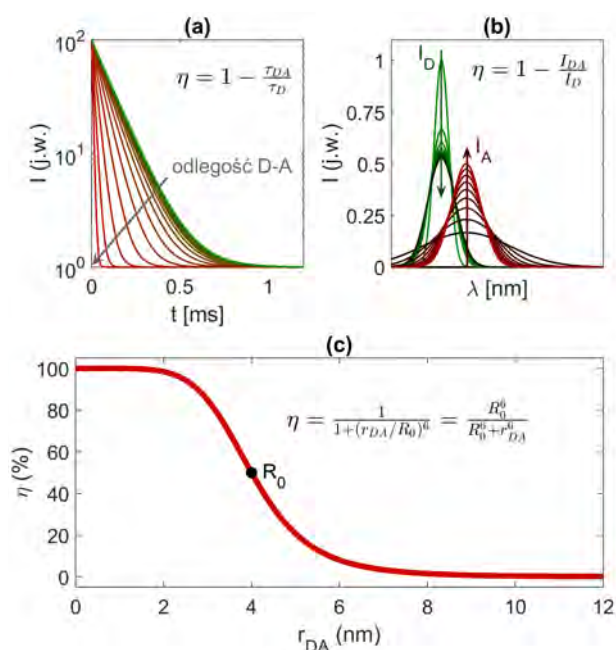
nych molekuł należy uwzględnić ich budowę i zastosować bardziej zaawansowane techniki analizy oraz pomiaru [34]. Zmienność powyższych parametrów i ich wpływ na wartość odległości Förstera oraz pośrednio na efektywność transferu energii, zaprezentowano na rys. 4. Zależność efektywności FRET od odległości pomiędzy molekułami dla ustalonych wartości powyżej opisanych parametrów została przedstawiona na rys. 4a. Kolejne wykresy przedstawiają przykładowe zależności odległości Förstera R_0 od: współczynnika załamania światła n — rys. 4b, orientacji molekuł κ^2 — rys. 4c, wydajności kwantowej ϕ_D — rys. 4d, całki przekrywania J — rys. 4e.

Metody pomiarowe

Zjawisko FRET ujawnia się podczas pomiarów czasów zaników (skracanie czasu zaniku luminescencji D w obecności A) oraz rejestracji widm emisji (zmniejszenie intensywności emisji D wraz ze wzrostem emisji A). Efektywność transferu (η) między molekułami donora i akceptora zależy monotonicznie od 6 potęgi odwrotności odległości pomiędzy nimi (r_{DA}) oraz odległości Förstera (R_0), zdefiniowanej jako odległość, dla której η jest równa 50% maksymalnej efektywności dla danej pary D - A . Wyznaczenie efektywności transferu FRET może być zrealizowane przez pomiar emisji dla próbki zawierającej D i A oraz porównanie z luminescencją samego D . Wraz ze zmniejszeniem odległości pomiędzy D i A lub zwiększeniem koncentracji A maleje intensywność luminescencji D (I_D), natomiast zwiększa się intensywność emisji A (I_A). Drugim sposobem wyznaczenia efektywności transferu energii η jest pomiar czasów zaniku luminescencji danego poziomu energetycznego D (τ_D), dla którego rejestruje się coraz krótsze czasy życia luminescencji pod wpływem transferu energii FRET do akceptora. Zmiany efektywności transferu energii z D do A wyznacza się na podstawie intensywności (I_D) lub czasów życia luminescencji (τ_D) dla D względem tych samych wartości w obecności A (oznaczonych jako I_{DA} , τ_{DA}). Na podstawie obserwacji powyżej opisanych zmian oraz znajomości wartości odległości Förstera R_0 można określić odległość, w jakiej znajdują się względem siebie donor i akceptor, a także wyznaczyć efektywność FRET (r_{DA}). Jest to opisane równaniem:

$$\eta_{FRET} = \frac{1}{1 + (r_{DA}/R_0)^6} = \frac{1}{1 + I_{DA}/I_D} = \frac{1}{1 + \tau_{DA}/\tau_D}. \quad (4)$$

Powyższa zależność opisuje efektywność FRET (rys. 5c) oraz powiązanie odległości pomiędzy D i A (r_{DA}) z wynikami pomiarów spektroskopowych, takich



Rys. 5. Odległość pomiędzy donorem (D) a akceptorem (A) r_{DA} można wyznaczyć na podstawie efektywności transferu FRET (η). Jest to możliwe za pomocą pomiarów życia luminescencji poziomów energetycznych lub widm emisji oraz znajomości odległości Förstera R_0 (tj. odległości dla danej pary D - A , dla której $\eta = 50\%$) zgodnie z równaniem (4). (a) Czasy zaników dla donora τ_D skracająca się wraz ze zmniejszaniem odległości pomiędzy D i A lub zwiększaniem koncentracji akceptora. (b) Widmo emisji donora (I_D) maleje wraz ze wzrostem intensywności emisji akceptora (I_A). (c) Zmiana efektywności transferu w funkcji odległości pomiędzy D i A (r_{DA}) [34]

jak widma emisji (rys. 5b) czy czasy zaników luminescencji ze wzbudzonych poziomów energetycznych (rys. 5a).

Podsumowanie

Zjawisko försterowskiego rezonansowego transferu energii (FRET) pozwala na określenie odległości pomiędzy dwoma molekułami: donorem (D) i akceptorem (A) energii. Odległość ta determinuje wartość efektywności transferu energii, co można wyznaczyć na podstawie widm luminescencji oraz czasów zaników z danego poziomu energetycznego. Jeżeli dwie różne biomolekuły (przykładowo przeciwciało i antygen) są związane odpowiednio z molekułami D i A , zjawisko FRET dostarcza informacji na temat ich interakcji lub jej braku.

Zwiększenie wydajności FRET można uzyskać przez dobranie odpowiedniego materiału optycznie aktywnego, o odpowiednich zakresach emisji oraz absorpcji (pod kątem długości fali wzbudzenia oraz części wspólnej emisji donora i absorpcji akceptora). W mikroskopii fluorescencyjnej obecnie najbardziej powszechnie przy pomiarach FRET stosuje się barwniki fluorescencyjne, które niestety pomimo powszechności ich stosowania wykazują szereg wad.

Niepożądane cechy barwników organicznych to: słabo oddzielone szerokie pasma absorpcji i emisji, krót-

kie czasy życia fluorescencji (co powoduje także rejestrację tła pochodzącego z komórek) oraz fotowysielanie pod wpływem oświetlania laserem (co skutkuje krótkim czasem na wykonanie pomiarów).

Rozwiązaniem tego problemu może być wybór nanokryształów domieszkowanych lantanowcami, wykazujących wąskie, rozdzielone pasma energetyczne, długie czasy zaniku luminescencji oraz fotostabilność. Właściwości optyczne oraz stabilność chemiczna nanokryształów domieszkowanych jonami lantanowców są dużymi zaletami umożliwiającymi dalsze zastosowania odpowiednio dobranych architektur kryształów do badań FRET, w tym np. zamiana barwników organicznych jako alternatywnych materiałów. Dystrybucja jonów domieszek oraz odległość pomiędzy jonami Ln^{3+} a powierzchnią wymusza optymalizację dobieranych struktur pod kątem efektywności transferu. Zjawisko FRET zachodzi, gdy odległość D - A nie przekracza kilku nanometrów, co wymaga uwzględnienia w potencjalnych zastosowaniach odległości D - A wraz z wymiarami badanych struktur biologicznych. Wybór architektury nanokryształu oraz jego składu będzie wpływał na dystrybucję jonów lantanowców oraz ich odległość od powierzchni, na której mogą zostać zakotwiczone barwniki organiczne.

Zasady działania mechanizmu FRET dają możliwość jego stosowania do badań reakcji biochemicznych w czasie rzeczywistym. Może też być z powodzeniem stosowane do prowadzenia badań zachowania struktur biologicznych w organizmach żywych na poziomie molekularnym.

Pokrycie powierzchni nanokryształów biomolekułami (tzw. biofunkcjonalizacja) pozwala śledzić i zrozumieć procesy biologiczne w czasie rzeczywistym.

Podziękowanie

Dziękuję prof. A. Bednarkiewiczowi za krytyczne uwagi, które były bardzo pomocne przy pisaniu niniejszego artykułu.

Literatura

- [1] D. Geißler, S. Linden, K. Liermann, K. D. Wegner, L. J. Charbonnière, N. Hildebrandt "Lanthanides and Quantum Dots as Förster Resonance Energy Transfer Agents for Diagnostics and Cellular Imaging" *Inorg. Chem.* vol. 53, no. 4, pp. 1824–1838, 2014.
- [2] R. Zhou, S. Kunzelmann, M. R. Webb, T. Ha "Detecting Intramolecular Conformational Dynamics of Single Molecules in Short Distance Range with Subnanometer Sensitivity" *Nano Lett* vol. 11, pp. 5482–5488, 2011.

- [3] I. Medintz and N. Hildebrandt, *FRET — Förster Resonance Energy Transfer* Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2014.
- [4] T. Förster “Energiewanderung und Fluoreszenz” *Naturwissenschaften* vol. 33, no. 6, pp. 166–175, 1946.
- [5] T. Förster “Energy migration and fluorescence” *J. Biomed. Opt.* vol. 17, no. 1, p. 011002, 2012.
- [6] J. Deal, D. J. Pleshinger, S. C. Johnson, S. J. Leavesley, T. C. Rich “Milestones in the development and implementation of FRET-based sensors of intracellular signals: A biological perspective of the history of FRET” *Cellular Signalling* vol. 75. Elsevier Inc., p. 109769, 2020.
- [7] R. S. Knox “Intermolecular energy migration and fluorescence” w *Biological Physics* 1st ed., E. V. Mielczarek, R. S. Knox, E. Greenbaum (Eds.) AIP-Press, 1993, pp. 148–160.
- [8] T. Förster “Zwischenmolekulare Energiewanderung und Fluoreszenz” *Ann. Phys.* vol. 437, no. 1–2, pp. 55–75, 1948.
- [9] T. Förster “10th Spiers Memorial Lecture. Transfer mechanisms of electronic excitation” *Discussions of the Faraday Society* vol. 27, no. 0. The Royal Society of Chemistry, pp. 7–17, 1959.
- [10] D. L. Dexter “A theory of sensitized luminescence in solids” *J. Chem. Phys.* vol. 21, no. 5, pp. 836–850, 1953.
- [11] F. Auzel “Upconversion and Anti-Stokes Processes with f and d Ions in Solids” *Chem. Rev.* vol. 104, no. 1, pp. 139–173, 2004.
- [12] B. Hellenkamp et al. “Precision and accuracy of single-molecule FRET measurements— a multi-laboratory benchmark study” *Nat. Methods* vol. 15, no. 9, pp. 669–676, 2018.
- [13] A. Gopi, S. Lingamoorthy, S. Soman, K. Yoosaf, R. Haridas, S. Das “Modulating FRET in Organic–Inorganic Nanohybrids for Light Harvesting Applications” *J. Phys. Chem. C* vol. 120, no. 46, pp. 26569–26578, 2016.
- [14] Thermo Fischer Scientific “Fluorescence Spectra-Viewer” Brand, 2017 [online]. <https://www.thermofisher.com/pl/en/home/life-science/cell-analysis/labeling-chemistry/fluorescence-spectraviewer.html>. [Accessed: 18-Mar-2020].
- [15] “Fluorescence Spectra Viewers” [online]. Available: <https://www.nightsea.com/sfa-sharing/fluorescence-spectra-viewers/>. [Accessed: 20-Apr-2020].
- [16] A. Miyawaki, A. Sawano, T. Kogure “Lighting up cells: Labelling proteins with fluorophores” *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.* vol. 4, no. SUPPL. 2003.
- [17] A. Gnach A. Bednarkiewicz “Lanthanide-doped up-converting nanoparticles: Merits and challenges” *Nano Today* vol. 7, no. 6, pp. 532–563, 2012.
- [18] K. Quan, C. Yi, X. Yang, X. He, J. Huang, K. Wang “FRET-based nucleic acid probes: Basic designs and applications in bioimaging” *TrAC - Trends Anal. Chem.* vol. 124, p. 115784, 2020.
- [19] A. Kaur S. Dhakal “Recent applications of FRET-based multiplexed techniques” *TrAC - Trends Anal. Chem.* vol. 123. Elsevier B.V., p. 115777, 2020.
- [20] G. Blasse B. C. Grabmaier *Luminescent Materials* Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1994.
- [21] S. McLennan R. S. Taylor *The Rare Earth Elements: Fundamentals and Applications* vol. 91, no. 5. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc., 2012.
- [22] G. H. Dieke, H. M. Crosswhite, B. Dunn “Emission Spectra of the Doubly and Triply Ionized Rare Earths” *J. Opt. Soc. Am.* vol. 51, no. 8, p. 820, 1961.
- [23] L. H. Yang, D. J. Ahn, E. Koo “Ultrasensitive FRET-based DNA sensor using PNA/DNA hybridization” *Mater. Sci. Eng. C* vol. 69, pp. 625–630, 2016.
- [24] R. M. Clegg “Fluorescence resonance energy transfer and nucleic acids” *Methods Enzymol.* vol. 211, no. C, pp. 353–388, 1992.
- [25] M. V. Golynskiy, W. F. Rurup, M. Merckx “Antibody Detection by Using a FRET-Based Protein Conformational Switch” *ChemBioChem* vol. 11, no. 16, pp. 2264–2267, 2010.
- [26] K. R. Bajgiran, J. A. Dorman, A. T. Melvin “Dipole-Modulated Downconversion Nanoparticles as Label-Free Biological Sensors” *ACS Sensors* vol. 5, no. 1, pp. 29–33, 2020.
- [27] J. T. Cao, W. S. Zhang, H. Wang, S. H. Ma, Y. M. Liu “A novel fluorescence immunosensor based on Förster resonance energy transfer between nitrogen and sulfur co-doped carbon dot functionalized silica nanospheres and Au@Ag NPs” *New J. Chem.* vol. 43, no. 3, pp. 1424–1430, 2019.
- [28] S. Wang, N. Mamedova, N. A. Kotov, W. Chen, J. Studer “Antigen/Antibody Immunocomplex from CdTe Nanoparticle Bioconjugates” *Nano Lett.* vol. 2, no. 8, pp. 817–822, 2002.
- [29] H. E. Grecco et al. “Ensemble and single particle photophysical properties (two-photon excitation, anisotropy, FRET, lifetime, spectral conversion) of commercial quantum dots in solution and in live cells” *Microsc. Res. Tech.* vol. 65, no. 4–5, pp. 169–179, 2004.
- [30] E. A. Jares-Erijman T. M. Jovin “Imaging molecular interactions in living cells by FRET microscopy” *Current Opinion in Chemical Biology* vol.

- 10, no. 5. Elsevier Current Trends, pp. 409–416, 2006.
- [31] E. A. Jares-Erijman T. M. Jovin “FRET imaging” *Nature Biotechnology* vol. 21, no. 11. Nature Publishing Group, pp. 1387–1395, 2003.
- [32] O. Tagit, G. Annio, N. Hildebrandt, “Terbium to quantum rod Förster resonance energy transfer for homogeneous bioassays with picomolar detection limits” *Microchim. Acta* vol. 182, no. 9–10, pp. 1693–1700, 2015.
- [33] A. Pilch et al. “Shaping Luminescent Properties of Yb³⁺ and Ho³⁺ Co-Doped Upconverting Core-Shell β -NaYF₄ Nanoparticles by Dopant Distribution and Spacing” *Small* vol. 13, no. 47, pp. 54–66, 2017.
- [34] W. R. Algar, N. Hildebrandt, S. S. Vogel, I. L. Medintz “FRET as a biomolecular research tool — understanding its potential while avoiding pitfalls” *Nat. Methods* vol. 16, no. 9, pp. 815–829, 2019.

Dziedzictwo Edwina Halla

Anna Krzyżewska

Instytut Spintroniki i Informatyki Kwantowej ISQI, Wydział Fizyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu*

Streszczenie. Niewątpliwie każdy młody adept nauk fizycznych już na początku swojej naukowej drogi styka się z klasycznym efektem Halla. Co więcej, każdy z nas, w mniejszym bądź większym stopniu korzystając ze zdobyczy techniki, czasem nawet nieświadomie posługuje się urządzeniami, w których wykorzystuje się to zjawisko. Mimo, że od odkrycia klasycznego efektu Halla minęło ponad sto lat, zagadnienie to nie jest zamkniętym rozdziałem na kartach historii fizyki, ale niezwykle płodną ideą, która wciąż skutkuje opisem nowych pokrewnych zjawisk. Odkrywanie nowych efektów Halla na przestrzeni lat może być też swego rodzaju znacznikiem postępu nauki w zakresie fizyki ciała stałego. Rozwijająca się w niewiarygodnym tempie mechanika kwantowa oraz możliwości technologiczne pozwalające na wytwarzanie układów cienkowarstwowych zaowocowały między innymi odkryciem kwantowego efektu Halla. Pogłębianie wiedzy z zakresu fizyki magnetyzmu, a w szczególności rozwój koncepcji spinu, umożliwiły wyjaśnienie mikroskopowych mechanizmów prowadzących do anomalnego efektu Halla [12, 15] i odkrycia spinowego efektu Halla [17, 18]. Wobec powyższego nie dziwi fakt, że współczesne trendy fizyki ciała stałego coraz częściej zwracają się w stronę topologii „dołożyły swoje trzy grosze” w postaci reinterpretacji anomalnego efektu Halla czy obserwacji nowych zjawisk, jak topologiczny czy nieliniowy efekt Halla. Zatem bez wątpienia warto poznać historię i choć pokrótce prześledzić losy jednej z najbardziej owocnych koncepcji fizyki ciała stałego.

Celem tego artykułu jest nakreślenie wspomnianych efektów transportowych przy zachowaniu chronologii. W ich interpretacji posługuję się głównie opisem półklasycznym, gdzie nośniki (elektrony) są traktowane jako cząstki podlegające prawom mechaniki klasycznej. Tam, gdzie takie spojrzenie staje się niewystarczające, wprowadzam jedynie niezbędne pojęcia z zakresu fizyki kwantowej i topologii, które są kluczowe dla wyjaśnienia efektów hallowskich opisanych w ostatnich latach.

Słowa kluczowe: klasyczny efekt Halla, kwantowy efekt Halla, anomalny efekt Halla, spinowy efekt Halla, nieliniowy efekt Halla, spin, oddziaływanie spin-orbita, faza Berry’ego, niezmiennik topologiczny

Abstract. Undoubtedly, all students of physical sciences become acquainted with the classical Hall effect at the very beginning of their scientific path. Moreover, each of us uses the technology based on this phenomenon to a greater or lesser extent without even being aware of it. Although more than one hundred years passed since the experiment of Edwin Hall, the problem of the Hall effect is not a closed chapter in the history of physics. Instead, Hall effects have become an extremely fertile idea yielding discoveries of new phenomena. One can say that the discoveries of new Hall effects have been over the years a kind of metric of scientific progress in solid-state physics. The fast development of quantum mechanics, as well as the technological progress, allowed for the fabrication of semiconducting thin films and, among others, the discovery of the quantum Hall effect. Advancement in the physics of magnetism, and spin physics, allowed to explain the microscopic mechanisms responsible for the anomalous Hall effect [12, 15] and the discovery of the spin Hall effect [17, 18]. It is also not surprising that in contemporary solid-state physics, strongly focusing on topological properties of solids, one can find the new members of the Hall effect family, i.e., the topological and non-linear Hall effect. Hence, it is worth to briefly review one of the most fruitful concepts in solid-state physics.

This article aims to introduce the Hall effects while maintaining the chronology of their discovery. I mainly used a semi-classical picture, where carriers (electrons) are treated as particles governed by the laws of classical mechanics. I also introduced the necessary concepts of quantum physics and topology, which are crucial for explaining the Hall effects described in recent years.

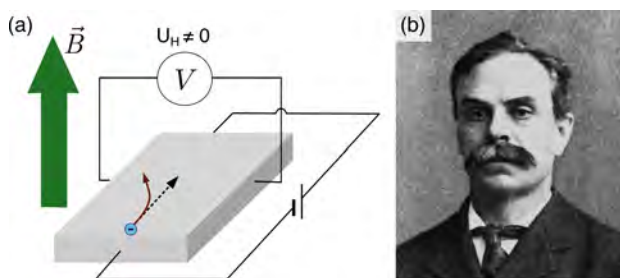
Keywords: classical Hall effect, quantum Hall effect, spin Hall effect, nonlinear Hall effect, spin, spin-orbit interaction, Berry phase, topological invariant

1. Klasyczny „kamień węgielny”

Początek naszej historii sięga 1879 roku, kiedy to w laboratorium na Uniwersytecie Johnsa Hopkinsa w Baltimore (USA), fizyk Edwin Herbert Hall (rys. 1(b)), pracując nad doktoratem pod czujnym okiem swojego mentora Henry’ego Rowlanda, bada wpływ pola magnetycz-

nego na przepływ prądu wymuszonego zewnętrznym polem elektrycznym. Prowadząc eksperymenty na cienkiej płycie złota, młody naukowiec uzyskuje pierwsze wyniki wskazujące na pojawienie się napięcia w płaszczyźnie prostopadłej do przepływającego prądu w obecności stałego pola magnetycznego przyłożonego prostopadle do płaszczyzny próbki (rys. 1(a)) [1, 2]. Odchylenie wiązki nośników

*ORCID: 0000-0002-0569-780X



Rys. 1. (a) schemat eksperymentu obrazującego klasyczny efekt Halla, (b) Edwin Herbert Hall (fot. 1903/1904)

prądu Edwin Hall przypisał „nowej sile elektromotorycznej” działającej pod kątem prostym do kierunku zewnętrznego pola elektrycznego, która została później zidentyfikowana jako siła Lorentza.

Badając także inne próbki metali, Hall doszedł do wniosku, że musi istnieć pewna stała charakteryzująca opór poprzeczny, R_{xy} , w danym materiale i niezależna od jego wymiarów. Co więcej, wielkość R_{xy} jest wprost proporcjonalna do wartości zewnętrznego pola magnetycznego, B : $R_{xy} = R_H \frac{B}{d}$, gdzie d jest grubością próbki. Przewidywania te sprawdziły się i określono stałą Halla $R_H = \frac{1}{ne}$, która z dobrą zgodnością jest wykorzystywana przy eksperymentalnym wyznaczaniu gęstości nośników, n , w metalach jednowartościowych, tj. z jednym elektronem przewodnictwa na atom (e — ładunek elementarny)¹.

Zjawisko Halla znalazło bezpośrednie zastosowanie w praktyce w postaci czujników Halla zwanych hallotronami, które służą do wykrywania i pomiaru amplitudy pola magnetycznego. Ze względu na swoją odporność na zanieczyszczenia, bezdotykowe działanie, dobrą dokładność pomiaru i stosunkowo niewielki koszt produkcji, hallotrony są szeroko stosowane między innymi do wykrywania elementów magnetycznych, wyznaczania ich prędkości czy chociażby jako zwykłe przełączniki reagujące na zmiany pola magnetycznego. Hallotrony, wykonane głównie z materiałów półprzewodnikowych, możemy znaleźć choćby w czytnikach płyt CD, DVD, telefonach komórkowych, sprzęcie komputerowym, AGD czy przemyśle motoryzacyjnym (rys. 2) [3].

Przykładowo, hallotrony, jako czujniki typu on/off, służą do detekcji otwarcia/zamknięcia pokrywy laptopa bądź etui czytnika czy telefonu. Wystarczy, że na jednej powierzchni umieścimy mały magnes, a na drugiej sensor Halla reagujący zmianą napięcia na obecność pola magnetycznego w jego otoczeniu. Zamknięcie pokrywy związane ze zbliżeniem się magnesu do czujnika spowo-



Rys. 2. Szereg zastosowań czujnika Halla

duje odebranie przez czujnik sygnału o zmianie pola magnetycznego. Informacja ta jest przesyłana przez czujnik do odpowiedniego oprogramowania, co spowoduje reakcję w postaci przejścia urządzenia w stan uśpienia. Taki automatyczny sposób działania pozwala zaoszczędzić trochę energii. Podobnie otwarcie pokrywy będzie skutkowało wybudzeniem się urządzenia i przejściem w tryb gotowości do pracy.

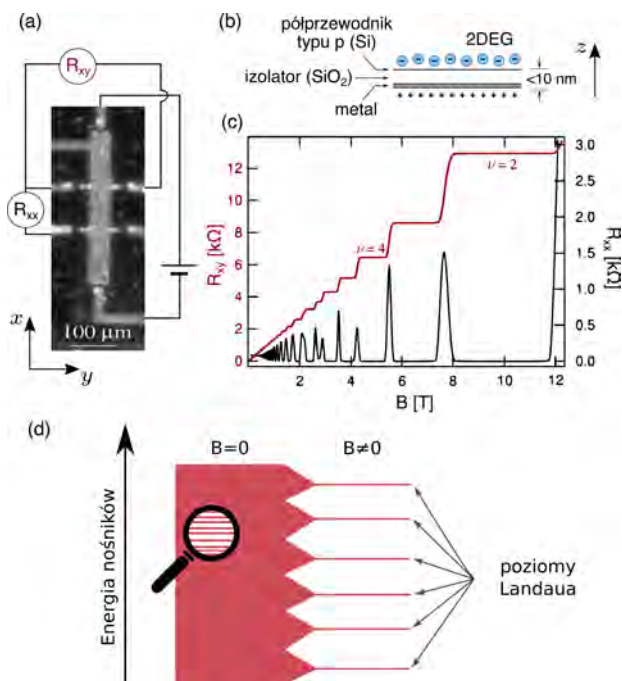
Hallotrony są stosowane także jako czujniki pozycji kątowej. Wyobraźmy sobie magnes stały w kształcie walca, którego podstawa jest połączona z elementem mogącym wykonywać ruch obrotowy tak, że każdy ruch tego elementu wiąże się bezpośrednio z ruchem obrotowym magnesu. Na magnes nałożony jest pierścień pozostający w stałej pozycji, na którym znajdują się równo rozmieszczone czujniki Halla. Obrót elementu ruchomego połączonego z magnesem wiąże się ze zmianą pola magnetycznego odbieranego przez czujniki znajdujące się na pierścieniu. Ruch ten przekłada się na odpowiednie zmiany napięcia, które po przetworzeniu sygnału pozwalają na detekcję kąta obrotu. Taka informacja może być wykorzystywana choćby w motoryzacji przy wykonaniu manewru skrętu pojazdu, gdzie elementem ruchomym jest kierownica.

Jednak, jak już wspomnieliśmy, odkrycie klasycznego efektu Halla było dopiero początkiem badań nad procesami związanymi z „poprzeczną” reakcją układu na zaburzenie zewnętrzne (czyli prostopadłą do kierunku zaburzenia — przyp. red.). Pionierskie prace Edwina Halla w tej dziedzinie uczyniły go ojcem szeregu zjawisk określanych dziś mianem efektów hallowskich, takich jak: klasyczny (opisany powyżej), kwantowy, anomalny, spinowy czy nieliniowy efekt Halla, których wspólnym mianownikiem jest przepływ ładunku/spinu w kierunku prostopadłym do zewnętrznego pola elektrycznego.

1. Stała Halla może przyjąć wartość dodatnią bądź ujemną, w zależności od tego, czy nośnikami ładunku w danym materiale są, odpowiednio, dziury bądź elektrony.

2. Nowa „jednostka” stała h/e^2

Jest rzeczą znaną, że niejednokrotnie piękno fizyki możemy docenić na poziomie mikro(nano)skopowym, w układach o zredukowanej liczbie wymiarów, o czym fizycy już niejednokrotnie się przekonali analizując procesy zachodzące w ramach fizyki kwantowej. Nie inaczej sprawa wygląda w przypadku kwantowego efektu Halla, gdzie zjawiska kwantowe stają się widoczne w skali makroskopowej. Efekt ten, charakterystyczny dla układów dwuwymiarowych, został odkryty w obecności silnego pola magnetycznego, B , w temperaturach helowych ($T \lesssim 4,2$ K). Okazało się, że wraz ze wzrostem B w pewnych zakresach wartości pola magnetycznego opór Halla pozostaje niezmienny, a jego wartość możemy wyrazić poprzez wielokrotności stosunku jednej z najbardziej fundamentalnych wielkości fizycznych, tj. ładunku elementarnego, e , i jednej z podstawowych stałych fizycznych — stałej Plancka, h : $R_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$, przy czym $\nu = 1, 2, 3, \dots$ dla całkowitego i $\nu = 1/3, 2/5, 3/7, \dots$ dla ułamkowego kwantowego efektu Halla. Co więcej dla tych samych zakresów, przy których R_{xy} osiąga *plateau*, opór w kierunku przyłożonego pola elektrycznego, R_{xx} , zanika (rys. 3(c)).



Rys. 3. Kwantowy efekt Halla: (a) schemat eksperymentu obrazującego kwantowy efekt Halla [4], (b) przekrój poprzeczny przez strukturę MOSFET, (c) zależność oporu podłużnego, R_{xx} , i poprzecznego, R_{xy} , od wartości zewnętrznego pola magnetycznego, (d) schematyczne przedstawienie skwantowania poziomów Landaua w silnym polu magnetycznym (schemat przedstawia fragment struktury pasmowej opisanej dokładniej na rys. 5)

Całkowity kwantowy efekt Halla możemy wyjaśnić wykorzystując model jednoelektronowy, który zakłada brak oddziaływań wzajemnych pomiędzy nośnikami. W przypadku bardzo cienkiej próbki (rzędu

mikro(nano)metrów, gdzie długość i szerokość znacznie przekraczają grubość materiału), nośniki poruszają się swobodnie w płaszczyźnie próbki, ale mają ograniczoną zdolność ruchu w kierunku do niej prostopadłym, stąd mówimy, że tworzą tak zwany dwuwymiarowy gaz elektronowy (2DEG). W obecności pola magnetycznego prostopadłego do płaszczyzny próbki, nośniki uwięzione w postaci 2DEG, mogą przyjmować jedynie pewne ściśle określone, skwantowane wartości energii zwane poziomami Landaua. W zakresie silnych pól magnetycznych, skwantowanie poziomów staje się bardziej widoczne, a na każdym z poziomów może znajdować się wiele elektronów (rys. 3(d)). Stąd liczba nośników o danej wartości energii (znajdujących się na tym samym poziomie energetycznym) jest niezmienna w pewnym przedziale wartości pola magnetycznego, B , co objawia się stałą wartością R_{xy} . „Przechodzeniu” nośników pomiędzy poziomami wraz ze zmianą wartości pola magnetycznego towarzyszy duże rozpraszanie energii, co uwidacznia się w postaci maksimów R_{xx} [4, 5].

Istnienie całkowitego kwantowego efektu Halla zostało przewidziane teoretycznie w 1975 roku przez Tsuneya Ando i współpracowników [6], choć ze względu na zastosowane założenia upraszczające (zaniedbanie defektów czy wpływu kontaktów pomiędzy próbką a elektrodami), w eksperymentalne potwierdzenie otrzymanych wyników nie do końca wierzyli nawet sami autorzy. Sytuacja się zmieniła, kiedy pięć lat później zjawisko to potwierdził w eksperymencie wykorzystującym tranzystor krzemowy typu MOSFET (struktura metal-tlenek-półprzewodnik) Klaus von Klitzing [7], za co otrzymał Nagrodę Nobla z fizyki w 1985 roku [4]. Relację h/e^2 udało się odtworzyć z dokładnością rzędu $1/10^6$, dzięki czemu stała się ona standardem przedstawiania rezystancji. Co więcej, otrzymany rezultat został potwierdzony także w innych materiałach (np. heterostrukturach półprzewodnikowych bazujących na arsenku galu) z różną ilością domieszek w układzie. Próbkę i schemat układu do pomiaru kwantowego efektu Halla przedstawia rys. 3(a), natomiast przekrój przez strukturę MOSFET (ang. *Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor*) ilustruje rys. 3(b).

W przypadku ułamkowego kwantowego efektu Halla, w grę wchodzi także oddziaływanie coulombowskie pomiędzy elektronami, co skutkuje grupowaniem nośników w formy kwazicząstek (w niskich temperaturach mówimy o powstaniu tak zwanej *cieczy kwantowej*), prowadzącym do dodatkowego rozszczepienia poziomów Landaua. Odkrycie oraz interpretacja ułamkowego kwantowego efektu Halla zostały uhonorowane Nagrodą Nobla dla trzech fizyków: Roberta Laughlina, Horsta Störmera i Daniela C. Tsui w 1998 [8], choć opis mechanizmu prowadzącego do niektórych otrzy-

many w eksperymencie wartości ułamkowych nadal pozostaje na liście nierozwiązanych problemów z zakresu fizyki ciała stałego [9].

Niska temperatura sprawia, że elektron nie mając wystarczająco dużo energii termicznej, aby pokonać przerwę energetyczną, pozostaje na zajmowanym przez niego poziomie. Jednak żeby z powodzeniem myśleć o praktycznym wykorzystaniu zjawiska, zdecydowanie musimy wyjść poza reżim temperatur helowych. Skwantowanie oporu poprzecznego w silnych polach magnetycznych (ok. 30 T) w temperaturze pokojowej udało się zaobserwować w grafenie [10] w 2007 roku. Grafen dał się poznać jako dość niezwykły materiał, w którym nośniki możemy traktować jak cząstki bezmasowe. Dzięki temu przerwy pomiędzy poziomami Landaua są dużo większe niż we wcześniej badanych materiałach półprzewodnikowych, co pozwala na zachowanie przerwy energetycznej nawet w wyższych temperaturach.

3. Rola spinu w warunkach (bez)polowych

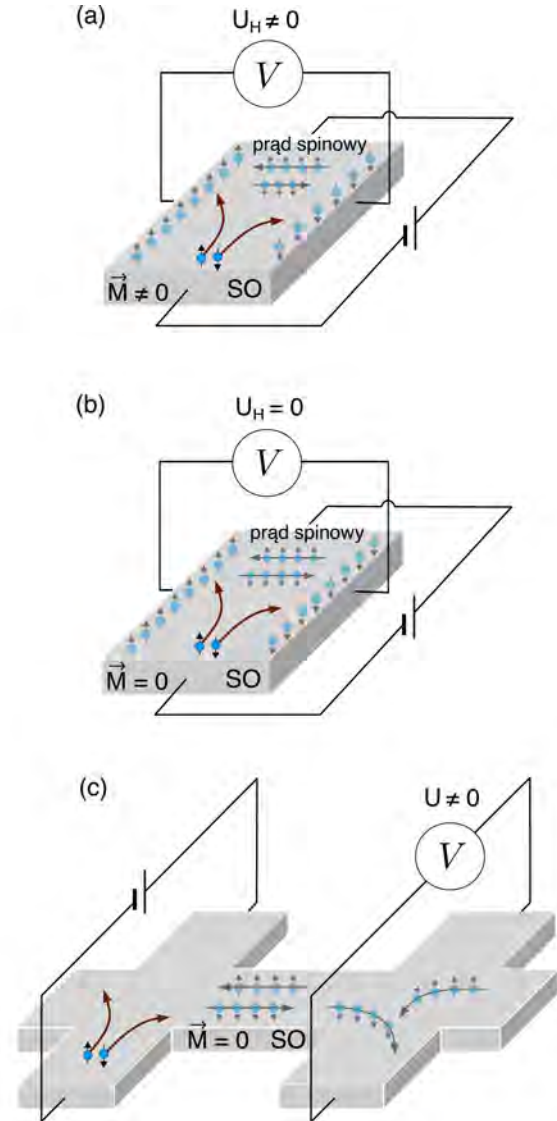
Jak zauważyliśmy do tej pory zarówno w klasycznym, jak i kwantowym efekcie Halla czynnikiem niezbędnym do uzyskania poprzecznej (do siły wymuszającej — przyp. red.) odpowiedzi układu była obecność zewnętrznego pola magnetycznego. Postawmy sobie zatem pytanie, czy jesteśmy w stanie zaobserwować prąd poprzeczny w układzie bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego?

Już sam Edwin Hall zdawał sobie sprawę z tego, że w przewodniku magnetycznym, np. w żelazie (ferromagnetyku) napięcie pomiędzy jego brzegami jest zdecydowanie większe niż w przypadku przewodnika niemagnetycznego, takiego jak złoto czy srebro [11]. Fakt ten stał się impulsem do badania wpływu magnetyzacji w układzie na efekt Halla.

Rozważając układy magnetyczne, musimy uwzględnić fakt, że elektron jest nośnikiem nie tylko ładunku, ale także spinu. Spin elektronu może przyjmować dwa stany, nazywane umownie spinem „w górę” (\uparrow) i „w dół” (\downarrow), które oznaczamy strzałkami w przeciwnych kierunkach, jak na rys 4.

Ferromagnetyk wykazuje spontaniczne namagnesowanie, co sprawia, że wypadkowa wartość magnetyzacji takiego materiału jest różna od zera i mamy do czynienia z niejednakową liczbą nośników ze spinem \uparrow i \downarrow . Okazało się, że jeśli wywołamy przepływ prądu w niektórych ferromagnetykach, to nawet bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego otrzymamy niezerowe napięcie hallowskie (rys. 4(a)). Zjawisko to nazwano anomalnym efektem Halla.

Zauważmy, że chociaż już Edwin Hall otrzymał pierwsze wyniki sugerujące wpływ magnetyzacji materiału na prąd poprzeczny w układzie, to dopiero prace



Rys. 4. Schemat eksperymentu obrazującego: (a) anomalny efekt Halla, (b) spinowy efekt Halla oraz (c) pomiar prądu spinowego w odwrotnym spinowym efekcie Halla (skrót SO oznacza obecność oddziaływania typu spin-orbita w materiale)

kolejnych fizyków, które ukazały się kilkadziesiąt lat później, pozwoliły zrozumieć mechanizmy stojące za tym zjawiskiem [12, 13, 14].

Co sprawia, że pomimo nieobecności siły Lorentza zakrzywiającej tor ruchu elektronów, nośniki nie poruszają się wzdłuż kierunku pola elektrycznego, ale ewidentnie zakrzywiają swoją trajektorię? Przyczyną takiego zachowania nośników jest obecność w układzie oddziaływania typu spin-orbita (SO). Oddziaływanie to pełni rolę wewnętrznego pola magnetycznego, które działa na spin cząstki, w odróżnieniu od zewnętrznego pola magnetycznego wpływającego na poruszające się ładunki elektryczne. Oddziaływanie SO jest źródłem m.in. procesów rozproszeniowych zależnych od spinu. Procesy te prowadzą do sytuacji, w których w wyniku oddziaływania elektronu z domieszką, tory ruchu nośników o przeciwnych spinach ulegają odchyleniu.

niu w przeciwnych kierunkach. Co więcej, oddziaływanie spinowo-orbitalne jest także źródłem modyfikacji struktury pasmowej, która generuje dodatkowy wkład do prędkości nośników, zwany *prędkością anomalną*. W efekcie otrzymujemy nierównowagową akumulację nośników o przeciwnych spinach na krawędziach próbki, która jest źródłem napięcia hallowskiego nawet pod nieobecność zewnętrznego pola magnetycznego.

Jest jeszcze jeden istotny aspekt, o którym warto wspomnieć. Pamiętamy, że elektrony przenoszą ładunek oraz spin, co pozwala nam mówić o prądzie ładunkowym, a także o prądzie spinowym spowodowanym ruchem elektronów. W wyniku oddziaływania typu spin-orbita, elektrony ze spinem \uparrow są odchylane w lewo, natomiast elektrony ze spinem \downarrow są odchylane w prawo (rys. 4(a)). W układach ferromagnetycznych wprowadzamy pojęcie spinu większościowego i mniejszościowego, co w naszym przypadku oznacza, że spin \uparrow jest spinem większościowym, który wyznacza nam także kierunek przepływu ładunku. W efekcie, oprócz poprzecznego prądu ładunkowego otrzymujemy także poprzeczny prąd spinowy.

W tym momencie niemal automatycznie nasuwa się pytanie, czy istnieje możliwość generacji prądu spinowego bez towarzyszącego mu prądu ładunkowego, tj. uzyskania *czystego prądu spinowego*? Twierdzącej odpowiedzi na to pytanie udzielili w 1971 roku Mikhail Dyakonov i Vladimir Perl [16, 17], wysnuwając hipotezę o możliwości konwersji prądu ładunkowego na spinowy w układzie paramagnetycznym, tj. takim, w którym liczby nośników ze spinem \uparrow i \downarrow są identyczne. Fakt ten sprawia, że akumulacji spinu na krawędziach próbki nie towarzyszy napięcie hallowskie. Zjawisko to zyskało miano spinowego efektu Halla (rys. 4(b)) i znalazło potwierdzenie w eksperymencie przeprowadzonym w układach półprzewodnikowych dopiero ponad 30 lat później [19].

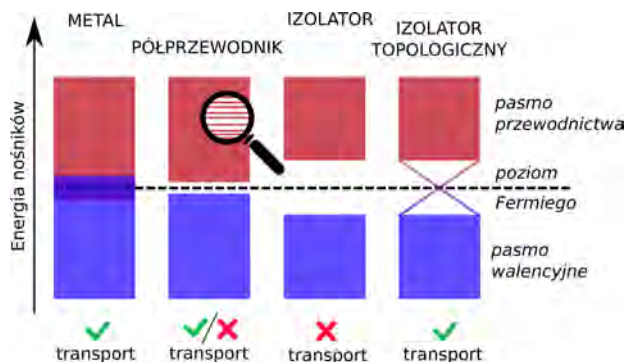
Wcielając się w rolę dociekliwego ucznia, postawmy sobie kolejne pytanie: czy i w jaki sposób możemy zmierzyć prąd spinowy? Zrealizowane koncepcje pomiaru prądu spinowego wykorzystują odwrotny spinowy efekt Halla [20, 21], poprzez detekcję prądu ładunkowego wywołanego prądem spinowym. Napięcie, którego źródło stanowi powstały prąd ładunkowy, jest proporcjonalne do pierwotnego prądu spinowego, stąd otrzymujemy informację o prądzie spinowym w układzie (rys. 4(c)) [22].

Spinowy i odwrotny spinowy efekt Halla stwarzają możliwość generacji i detekcji prądu spinowego w układach niemagnetycznych, będąc tym samym cennym narzędziem badawczym, umożliwiającym kontrolę spinu bez udziału pola magnetycznego. Ponadto na podstawie spinowego efektu Halla stworzono spinowy tranzystor

polowy, bazujący na prądzie spinowym, w odróżnieniu od tradycyjnych tranzystorów wykorzystujących przepływ ładunku [23].

4. W stronę topologii

Podobnie jak klasyczny efekt Halla, także anomalny i spinowy posiadają swoje kwantowe odpowiedniki. Efekty te obserwujemy w nowej klasie materiałów — w tzw. topologicznych izolatorach (rys. 5) [25].



Rys. 5. Schematyczne przedstawienie struktury pasmowej (rozkładu energetycznego nośników) dla metalu, półprzewodnika, izolatora i izolatora topologicznego. Poziom Fermiego wyznacza górną granicę obsadzenia stanów. Obecność nośników w pasmie przewodnictwa (kolor czerwony) — biorących udział w transporcie — sprawia, że dany materiał jest przewodnikiem (metal). W przypadku półprzewodnika dostarczenie do układu niewielkiej ilości energii (np. termicznej poprzez zwiększenie temperatury) powoduje przeskok nośników z pasma walencyjnego do przewodnictwa, dzięki czemu w materiale może zachodzić transport ładunku. Dla izolatora i izolatora topologicznego przerwa pomiędzy pasmem przewodnictwa a walencyjnym jest duża, co wskazywałoby na brak transportu w układzie. Jednak w przypadku izolatora topologicznego 3D/2D istnienie stanów przewodzących na powierzchni/krawędziach materiału sprawia, że materiał jest przewodnikiem na powierzchni/krawędzi, pozostając we wnętrzu izolatorem. Lupa wskazuje, że za schematycznym przedstawieniem pasma przewodnictwa i walencyjnego jako kolorowe bloki, kryje się zbiór pasm, których liczba i rozkład oraz ukształtowanie są specyficzne dla danego układu

Topologia jest dziedziną matematyki, której pojęcia zostały z powodzeniem przeniesione na grunt fizyki. Od czasu przyznania Nagrody Nobla z fizyki w 2016 roku za *teoretyczne odkrycia topologicznych przejść fazowych i topologicznych faz materii* trzem brytyjskim naukowcom: Davidowi Thoulessowi, Duncanowi Haldane'owi oraz Michaelowi Kosterlitzowi [24], koncept topologii coraz wyraźniej odciska swoje piętno w fizyce ciała stałego. Zapewne wielu z nas słyszało o równoważności topologicznej kubka i obwarzanka: mówi nam ona o tym, że pewne cechy obiektu (tu: liczba otworów) nie ulegają zmianie nawet przy modyfikacji innych wielkości (deformacji kubka, jakby był zrobiony z plasteliny), przyjmując ściśle określone wartości. Cechy te określa się mianem *niezmienników topologicznych*.

I tak, niezmiennikiem topologicznym w podanym przykładzie będzie liczba dziur w badanym obiekcie: o ile zarówno dla kubka (z uszkiem) jak i obwarzanka wartość tej stałej jest równa 1, o tyle dla arbuza czy wazonu

przyjmie ona wartość 0, natomiast w przypadku torby na zakupy czy oprawki okularowej — 2.

Przechodząc na grunt fizyki, w ramach pojęć topologii możemy wyjaśnić całkowity kwantowy efekt Halla, gdzie stała ν jest niezmiennikiem topologicznym ($R_{xy} = \frac{h}{\nu e^2}$), mogącym przyjmować tylko wartości z zakresu liczb całkowitych. W przypadku ułamkowego kwantowego efektu Halla, uwzględnienie oddziaływania coulombowskiego pomiędzy elektronami powoduje, że stała ν może przyjmować wartości ułamkowe.

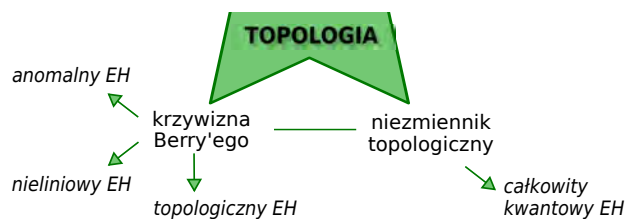
Wyjaśnienie kwantowego efektu Halla zapoczątkowało mariaż z topologią, która odgrywa rolę w opisie efektów hallowskich (rys. 6). W tym miejscu jedynie wspomnę o jej najważniejszych osiągnięciach na tym polu.

Nowe, topologiczne spojrzenie na znane zjawiska doprowadziło do reinterpretacji prędkości anomalnej w anomalnym efekcie Halla, wiążąc ją z tak zwaną krzywizną Berry'ego, którą, pozostając w opisie półklasycznym i przez analogię do elektrodynamiki, możemy wyobrazić sobie jako siłę pola oddziałującego na cząstkę poruszającą się w ramach danego pasma/kanalu n (w modelu jednoelektronowym, na jeden kanał/pasmo przypada jeden elektron).

Zatrzymajmy się na moment w tym miejscu i rozszerzmy nasz półklasyczny opis o interpretację kwantową. Jedną z podstawowych zasad, jakimi rządzi się mechanika kwantowa, jest nielokalność (pojęcie tzw. upiornego działania na odległość uknute przez Alberta Einsteina). Najprościej rzecz ujmując chodzi o to, że zjawiska zachodzące w jednym miejscu mają wpływ na to, co dzieje się w innym. Innymi słowy ważne jest, gdzie przebywała cząstka w trakcie zakreślania swojej trajektorii. W przypadku cząstki poruszającej się w przestrzeni, zasada ta objawia się w postaci *fazy geometrycznej*, którą cząstka zyskuje podczas ruchu po zamkniętym torze. Ze względu na to, że w obrazie kwantowym każdą cząstkę możemy traktować jednocześnie jako falę, stan danej cząstki opisujemy za pomocą funkcji falowej. Wspomniana faza geometryczna wchodzi do opisu takiej funkcji jako tak zwana faza Berry'ego. Ta z kolei jest ściśle związana z krzywizną Berry'ego, będącą źródłem poprzecznej składowej prędkości w anomalnym efekcie Halla.

W układach, gdzie krzywizna Berry'ego pojawia się na skutek niekolinearnego ułożenia spinów (spiny atomów sieci nie leżą w jednej płaszczyźnie) mamy do czynienia z topologicznym efektem Halla [26].

W ostatnich latach pojawiła się także koncepcja nieliniowego efektu Halla, w której główną rolę odgrywa wspomniana krzywizna Berry'ego. Poznane do tej pory efekty Halla możemy sklasyfikować jako liniowe względem pola elektrycznego, $R_{xy} \propto E_x$. Nieliniowy efekt



Rys. 6. Powiązanie efektów hallowskich (EH) z topologią

Halla polega na pojawieniu się poprzecznego prądu ładunkowego proporcjonalnego do kwadratu wartości pola elektrycznego, $R_{xy} \propto E_x^2$. Obecność nieliniowej odpowiedzi układu została zasugerowana w 2015 roku przez Inti Sodemana i Lianga Fu [27] i potwierdzona w eksperymencie już cztery lata później. Efekt ten zaobserwowano zarówno w dwuwymiarowych układach niemagnetycznych bez udziału zewnętrznego pola magnetycznego, jak i w izolatorach topologicznych w obecności pola magnetycznego przyłożonego w płaszczyźnie próbki [28].

Możemy teraz zapytać, czy i w jaki sposób nieliniowy efekt Halla mógłby zostać wykorzystany w praktyce? W odróżnieniu od pozostałych efektów hallowskich, w przypadku nieliniowego efektu Halla potencjalnych zastosowań poszukajmy w obszarze związanym z prądem zmiennym. Ze względu na to, że w odpowiedzi na sygnał o częstotliwości f otrzymujemy poprzeczną odpowiedź o częstotliwości $2f$, układ wykorzystujący ten efekt mógłby działać jako generator drugiej harmonicznej. Operując częstotliwościami giga- i terahercowymi możemy z powodzeniem szukać zastosowania w następnych generacjach sieci bezprzewodowych.

5. Bez kropki nad i

Jak widzimy, rola topologii w interpretacji efektów hallowskich jest nie do przecenienia. Rzetelne przedstawienie pojęć, jakimi posługuje się ta stosunkowo nowa dziedzina wiedzy w kontekście fizyki, wymaga co najmniej osobnego artykułu. Natomiast głównym celem niniejszej pracy było przedstawienie mnogości zjawisk posiadających wspólne korzenie, a także ich interpretacja w języku półklasycznym tam, gdzie jest to możliwe, jedynie w niewielkim stopniu uchylając drzwi do świata fizyki kwantowej. Tym samym autorka z pełną świadomością pozostawia czytelnika z pewnym niedosytem wiedzy mając nadzieję, że udało jej się rozbudzić ciekawość skłaniającą do dalszych poszukiwań odpowiedzi na nurtujące pytania w zakresie przedstawionych zjawisk i aktualnych zagadnień fizyki ciała stałego.

Podziękowanie

Dziękuję Annie Dyrdał za cenne uwagi do tekstu.

Literatura

- [1] E. Hall, On a New Action of the Magnet on Electric Currents, *Am. J. Math.* **2**, pp. 287–292 (1879).
- [2] G. S. Leadstone, The discovery of Hall effect, *Phys. Educ.* **14**, 374 (1979).
- [3] J. Doliński, *Czujniki Halla — pomiary pola magnetycznego i detekcja położenia obiektów*, <https://elektronikab2b.pl> (2017), [dostęp 22.03.2020].
- [4] K. von Klitzing, The Quantized Hall Effect, *Nobel Lecture* (1985); 25 Years of Quantum Hall Effect (QHE). A Personal View on the Discovery. Physics and Applications of this Quantum Effect, *Séminaire Poincaré* **2**, (2004).
- [5] K. I. Wysokiński, T. Dietl, Całkowity i ułamkowy kwantowy efekt Halla, *Postępy Fizyki* **36**, 515, (1985).
- [6] T. Ando i in., Theory of Hall Effect in a Two-Dimensional Electron System, *J. Phys. Soc. Jpn.* **39**, 279 (1975).
- [7] K. von Klitzing i in., New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant Based on Quantized Hall Resistance, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494 (1980).
- [8] H. L. Störmer, Nobel Lecture: The fractional quantum Hall effect, *Rev. Mod. Phys.* **71**, 875 (1999).
- [9] List of unsolved problems in physics, https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_unsolved_problems_in_physics, [dostęp 05.04.2020].
- [10] K. Novoselov i in., Room-temperature quantum Hall effect in graphene, *Science* **315**, 1379 (2007).
- [11] E. Hall, XVIII. On the “Rotational Coefficient” in nickel and cobalt. *London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **12** (74), 157–172 (1881).
- [12] R. Karplus, J. M. Luttinger, Hall Effect in Ferromagnetics, *Phys. Rev.* **95**, 1154 (1954).
- [13] J. Smit, The spontaneous Hall effect in ferromagnetics, *Physica* **21**, 877 (1955); *Physica* **24**, 39 (1958).
- [14] L. Berger, *Side-Jump Mechanism for the Hall Effect of Ferromagnets*, *Phys. Rev. B* **2**, 4559 (1970).
- [15] V. Zayets, *Anomalous Hall effect (AHE)*, https://staff.aist.go.jp/v.zayets/spin3_50_AnomalousHall.html, [dostęp 19.10.2020].
- [16] M. Dyakonov, V. Perel, Possibility of orienting electron spins with current, *Sov. Phys. JETP Lett.* **13**, 11 (1971); Current-induced spin orientation of electrons in semiconductors, *Phys. Lett. A* **35**, 6 (1971).
- [17] J. Hirsch, Spin Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **83**, 1834 (1999).
- [18] V. Zayets, *Spin Hall effect. Inverse spin Hall effect*, https://staff.aist.go.jp/v.zayets/spin3_42_SpinHallEffect.html, [dostęp 19.10.2020].
- [19] Y. Kato i in., Observation of the Spin Hall Effect in Semiconductors, *Science*, **306**, 5703 (2004); J. Wunderlich i in., Experimental Observation of the Spin-Hall Effect in a Two-Dimensional Spin-Orbit Coupled Semiconductor System, *Phys. Rev. Lett.* **94**, 4 (2005).
- [20] E. Saitoh i in., Conversion of spin current into charge current at room temperature: Inverse spin-Hall effect, *Appl. Phys. Lett.* **88**, 182509 (2006).
- [21] S. Valenzuela, M. Tinkham, Direct electronic measurement of the spin Hall effect, *Nature* **442**, 176 (2006).
- [22] J. Balakrishnan i in., Colossal enhancement of spin-orbit coupling in weakly hydrogenated graphene, *Nat. Phys.* **9**, 284 (2013); A. Avsar i in., Spin-orbit proximity effect in graphene, *Nat. Commun.* **5**, 1 (2014).
- [23] J. Wunderlich i in., Spin Hall Effect Transistor, *Science* **330**, 1801 (2010).
- [24] Nobel Prize in Physics 2016, <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016>, [dostęp: 10.04.2020].
- [25] Ł. Cywiński, T. Dietl, Izolatory topologiczne — niespodzianki ukryte w strukturze pasmowej izolatorów, *Postępy Fizyki* **61**, 4 (2010).
- [26] A. Neubauer i in., Topological Hall Effect in the A Phase of MnSi, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 186602 (2009).
- [27] I. Sodemann, L. Fu, Quantum nonlinear Hall effect induced by Berry curvature dipole in time-reversal invariant materials, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 216806 (2015).
- [28] K. Kang i in., Nonlinear anomalous Hall effect in few-layer WTe₂, *Nat. Mater.* **18**, 324 (2019); Q. Ma i in., Observation of the nonlinear Hall effect under time-reversal-symmetric conditions. *Nature* **565**, 337 (2019); P. He i in., Nonlinear Planar Hall Effect, *Phys. Rev. Lett.* **123**, 016801 (2019).



Defekty topologiczne i przemiany fazowe¹

Wykład noblowski wygłoszony 8 grudnia 2016

John Michael Kosterlitz

Uniwersytet Browna, Providence, Rhode Island, USA

Opublikowany w języku polskim za zgodą Nobel Foundation

©the Nobel Foudation 2016

Przekład dokonany przy wsparciu finansowym Fundacji Pro-Physica

Słowa kluczowe: układy dwuwymiarowe, przemiany fazowe indukowane przez defekty topologiczne, wiry w układach spinów, dyslokacyjna teoria topnienia, grupa renormalizacji

Keywords: two-dimensional systems, phase transitions induced by topological effects vortices in spin systems, dislocation theory of melting, renormalization group flow

1. Wprowadzenie

To wielki zaszczyt, mówić dziś do Państwa na temat teoretycznych odkryć dotyczących topologicznych przemian fazowych i topologicznych faz materii. Jako że główny bohater, David Thouless², nie może tu wystąpić osobiście, my, dwaj pomniejsi bohaterowie, Duncan Haldane i ja, zostaliśmy poproszeni, aby zastąpić Davida. Jest to bardzo trudne zadanie. Dręczyło mnie ono przez dłuższy czas, gdyż nie uważałem się za odpowiednią do tego osobę. W końcu czas [dany mi na podjęcie decyzji]³ upłynął i musiałem przygotować coś, co by się nadało. Postanowiłem więc rozpocząć od moich pierwszych kontaktów z Davidem i powiedzieć, jak doszło do tego, że w końcu wspólnie pracowaliśmy nad czymś, co przyniosło Nagrodę Nobla. Następnie podsumuję moje zrozumienie przełomu, jakim było zastosowanie przez Niego topologii do klasycznej (tj. występującej nawet w granicy $\hbar = 0$) przemiany fazowej Bierezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa zwanej też przemianą BKT. David pracował również nad wieloma różnymi zastosowaniami topologii do układów kwantowomechanicznych i związanych z topologią zjawiskami, takimi jak kwantowy efekt Halla. O wkładzie, jaki David wniósł do tych zagadnień, powie Państwu Duncan Haldane.

Po raz pierwszy ujrzałem Davida Thoulessa w roku 1961, gdy byłem świeżo upieczonym studentem Uniwer-

sytetu w Cambridge. Wraz z dużą grupą ćwiczeniową oczekiwałem na prowadzącego zajęcia z matematyki dla fizyków, żeby przyszedł i nas oświecił, gdy do sali wkroczył jakiś młody człowiek, zdecydowanie za młody, jak na taki zaawansowany przedmiot. Było jasne, że pomylił sale. Ku naszemu zdumieniu stanął przed nami i zaczął mówić o różnych skomplikowanych kawałkach matematyki, o których większość grupy albo nigdy wcześniej nie słyszała, albo ich nie rozumiała. Z miejsca stało się jasne, że mamy do czynienia z umysłem działającym na zupełnie innym poziomie, niż umysły zasiadających w audytorium. Moje późniejsze kontakty z Davidem tylko spotęgowały to pierwsze wrażenie. Po raz drugi zetknąłem się z nim w roku 1971 na Wydziale Fizyki Matematycznej Uniwersytetu w Birmingham w Anglii, gdzie trafiłem trochę przez przypadek jako postdok zajmujący się fizyką wysokich energii. Po roku przeżywania frustracji szukałem wtedy jakiegoś nowego problemu, którym mógłbym się zająć, a David wprowadził mnie w nowy świat topologii i przemian fazowych w układach dwuwymiarowych.

Jeśli o mnie chodzi, to moje badania wzbudzeń topologicznych rozpoczęły się w roku 1970, gdy byłem zajmującym się fizyką wysokich energii postdokiem w Instytucie Fizyki Teoretycznej na uniwersytecie w Turynie we Włoszech. Będąc bardzo niezorganizowaną osobą nie zdążyłem wysłać w porę mojego zgłoszenia do konkursu na stanowisko w CERN w Genewie i zostałem bez zatrudnienia na następny rok. Po wysłaniu kilku odpowiedzi na ogłoszenia o pracy znalezione w brytyjskich czasopiśmie, otrzymałem stanowisko postdoka na Wydziale Fizyki Matematycznej uniwersytetu w Birming-

1. Nagrodę Nobla z fizyki w roku 2016 podzielili między siebie David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane i J. Michael Kosterlitz. Artykuł jest tekstem jednego z dwóch wykładów wygłoszonych z tej okazji (przyp. red.).

2. David J. Thouless zmarł 06.04.2019 (przyp. red.).

3. Teksty w nawiasach kwadratowych dodał tłumacz z uwagi na zbyt zwięzły, a czasem wręcz niezrozumiały język oryginału (przyp. red.).

ham w Anglii. Nie miałem ochoty jechać do Birmingham, które w owym czasie było dużym miastem przemysłowym w płaskim środku Anglii, w którym budowano wiele samochodów i ciężarówek. Z pewnością nie było to dla mnie najlepsze miejsce do życia, jednak z moją dziewczyną zdecydowaliśmy, że będzie to lepsze niż alternatywa, jaką był brak zatrudnienia. Przez pierwszy rok pracy kontynuowałem tam pewne skomplikowane obliczenia w ramach kwantowej teorii pola, ale przydarzył mi się przykry wypadek: byłem już bliski spisania moich obliczeń do publikacji, gdy na moim biurku wylądował preprint grupy z Berkeley, która zrobiła dokładnie to samo. Gdy taka sytuacja powtórzyła się jeszcze dwa lub trzy razy, straciłem wszelkie złudzenia. W desperacji zacząłem obchodzić cały wydział w poszukiwaniu jakiegoś sensownego problemu z jakiegokolwiek dziedziny fizyki. Pojawiłem się też w gabinecie Davida Thoulessa, by usłyszeć od niego o kilku nowych i tajemniczych pojęciach, takich jak topologia, wiry w substancjach wykazujących nadciekłość i dyslokacje w dwuwymiarowych kryształach. Żeby było jeszcze gorzej, moja znajomość mechaniki statystycznej była niemal zerowa, ponieważ wcześniej nie uczyłem się na wykład z tego przedmiotu, uważając, że jest on nieistotny dla fizyki wysokich energii, którą uważałem za jedyny godny zainteresowania dział fizyki. Ku memu zaskoczeniu pomysły Davida wydały mi się sensowne i, jako nowe i odmienne [od innych], warte rozpatrzenia. Zaczęliśmy pracować nad problemem przemian fazowych, w których pośredniczą defekty topologiczne; mojemu niedoświadczonemu umysłowi wydawało się to po prostu jeszcze jednym zastosowaniem teoriopólowej koncepcji i jako takim wartym, by się im przyjrzeć. Nie zdawałem sobie sprawy ani z tego, jak nowatorskie i istotne okazały się w nadchodzących dekadach te idee oraz ich zastosowania, ani dokąd nas one zaprowadzą.

Teraz chciałbym powiedzieć, jak wydatnie David przyczynił się do zrozumienia przemian fazowych w układach dwuwymiarowych. Jednym z powodów zajęcia się przez nas takimi właśnie układami było to, że wydawały się nam one prostsze niż układy trójwymiarowe. David już wcześniej zajmował się był przemianami fazowymi indukowanymi przez defekty topologiczne w kontekście jednowymiarowego łańcucha spinów Isinga, których oddziaływanie wzajemne zanikało [z odległością] jak $1/r^2$. Model taki można też rozpatrywać w języku defektów topologicznych lub ścian domenowych, których oddziaływanie zmienia się jak $\ln(r/a)$ [1]. Wcześniej David wykazał był, że w [temperaturze krytycznej] T_{cr} namagnesowanie spada do zera w sposób nieciągły, mimo iż nie jest to przemiana fazowa pierwszego rodzaju. Efekt ten został później bardziej ilościowo zbadany przez Andersona i Yuvala [2],

którzy zastosowali do niego jedną z pierwszych wersji grupy renormalizacji. Praca ta w istotny sposób wpłynęła na nasze myślenie o przemianach fazowych indukowanych przez defekty, gdyż zainspirowała nas do szukania innych układów, w których występują punktowe defekty topologiczne, a ich oddziaływania wzajemne zależą od odległości w sposób logarytmiczny. Przykładami takich defektów są punktowe wiry w błonach tworzonych przez atomy ^4He , w błonach nadprzewodzących oraz punktowe dyslokacje w dwuwymiarowych kryształach. To z kolei doprowadziło nas do zastosowania do takich układów modelu gazu coulombowskiego. Ci z Państwa, którzy zwracają uwagę na szczegóły mogą jednak uważać, że analogia ta ma poważną wadę, gdyż nasz wyjściowy jednowymiarowy układ jest różny od innych układów, które można traktować jak gaz coulombowski w dwóch wymiarach. Powodem, dzięki któremu [analogia] z gazem coulombowskim jednowymiarowego układu z oddziaływaniem logarytmicznym działa, są nałożone [na ten układ takie] więzy wymuszające, że ładunki (lub ściany domen) rozmieszczone wzdłuż linii mają naprzemienne znaki. Jeśli więzy te zostałyby zniesione, przemiana fazowa by znikła. Oczywiście nie jest to pierwszy przypadek, gdy poprawna konkluzja została wyprowadzona z błędnych przesłanek.

Jako że standardowym modelem dwuwymiarowego kryształu jest taki układ cząsteczek, że znajomość położenia jednej z nich wyznacza poprzez równość $\mathbf{r}(n, m) = n \mathbf{e}_1 + m \mathbf{e}_2$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty$, a \mathbf{e}_1 i \mathbf{e}_2 są dwoma fundamentalnymi wektorami sieci) położenia wszystkich pozostałych, pierwszą rzeczą, jaką musieliśmy zrozumieć, była rola długozasięgowego uporządkowania w kryształach i substancjach nadciekłych. Problemem jest tu argument Paierlsa [3, 4], który mówi, że w dwuwymiarowym ciele stałym długozasięgowego uporządkowanie nie jest możliwe, ponieważ wzbudzenia fononowe o niskich energiach powodują, iż w układzie o wymiarach $L \times L$ średnie kwadratowe wychylenie cząsteczek z ich położeń równowagi rośnie logarytmicznie wraz ze wzrostem rozmiaru L układu. Poglądowo dwuwymiarowy kryształ można sobie wyobrazić jako płaski elastyczny arkusz, na którym zaznaczona jest sieć punktów reprezentujących atomy lub cząsteczki kryształu. Rozciągnijmy teraz, nie rozdzierając go, jedne obszary tego arkusza, a inne ściśnijmy reprezentując w ten sposób gładkie, elastyczne odkształcenia kryształu. W oczywisty sposób punkty (cząsteczki) oddalą się znacznie (w rzeczy samej o odległości proporcjonalne do $\sqrt{\ln L}$) od swoich wyjściowych położeń, choć struktura sieci pozostanie zachowana. Ścisły dowód niewystępowania długozasięgowego uporządkowania takiego rodzaju został podany przez Mermina [5]. Podobne argumenty pokazują, że spontaniczne nama-

gnesowanie nie występuje w dwuwymiarowym magnetyku Heisenberga [6] oraz że wartość oczekiwana parametru porządku charakteryzującego nadciekłość dwuwymiarowej cieczy Bosego jest równa zeru [7].

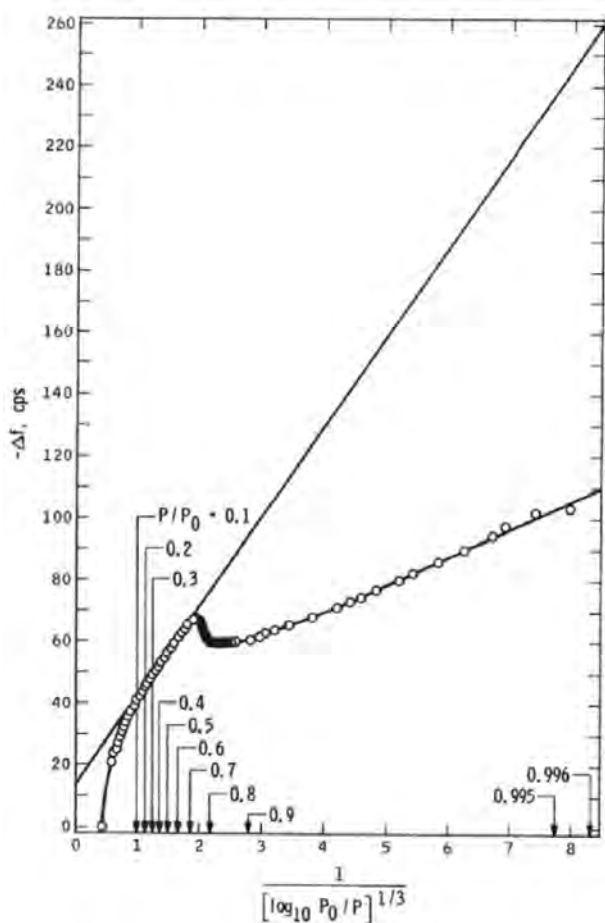
Zgodnie z tym, co się na początku lat siedemdziesiątych powszechnie uważało, oznaczało to, iż [w układach dwuwymiarowych] przemiana fazowa do stanu uporządkowanego nie może zachodzić w żadnej skończonej temperaturze, gdyż stan uporządkowany po prostu nie istnieje! Ta drobna sprzeczność nas jednak nie powstrzymała: Davida — bo rozumiał on subtelność zagadnienia i był w stanie dostrzec wyjście z pozornej sprzeczności, a mnie — bo zbyt mało wiedziałem, aby w ogóle zdawać sobie sprawę, że jakaś sprzeczność istnieje. Patrząc z perspektywy, zrozumiałem, że *wyjątkowo* czasami bycie nieświadomym tego, iż jakiś problem jest nierozwiązywalny pozwala posuwać się do przodu i rozwiązać go mimo to. Na szczęście dla mnie była to właśnie jedna z takich sytuacji. Oczywiście pomogło nam też to, że były pewne numeryczne i eksperymentalne dowody występowania przemian fazowych do bardziej uporządkowanej fazy niskotemperaturowej w dwuwymiarowych

kryształach [8, 9], bardzo cienkich błonach tworzonych przez atomy ^4He [10, 11] i w dwuwymiarowych modelach magnetyków [12, 13, 14]. Najbardziej przekonującym nas dowodem eksperymentalnym był wykres przedstawiony na ryc. 1. Pokazana jest na nim zależność obniżenia Δf częstości rezonansowej f kryształu od powierzchniowej gęstości masy zaadsorbowanej na jego powierzchni błony utworzonej z ^4He . Odchylenie tej zależności od linii prostej świadczy o pojawieniu się stanu nadciekłego. Jest jasne, że gdy gęstość $\rho_s(T)$ zaadsorbowanej masy wzrasta, w dwuwymiarowej błonie zachodzi gwałtowna przemiana; przypuszczalnie gęstość $\rho_s(T)$ masy ma przy tym skończoną nieciągłość. Takie zachowanie wydawało się bardzo dziwne, gdyż zgodnie z powszechną wiedzą przy przechodzeniu do fazy uporządkowanej gęstość ρ_s powinna była narastać w sposób ciągły od zera. Wymagało więc ono wyjaśnienia, które musiało być oczywiście różne od tego, co było wcześniej znane.

2. Przełom

Rozwiązanie tej zagadki jest takie, że w niektórych układach dwuwymiarowych może istnieć bardziej subtelny typ uporządkowania, nazywany uporządkowaniem topologicznym. Najprostszym przykładem [takiego układu] jest ferromagnetyk Isinga tworzony przez zbiór spinów $S_a = \pm 1$ umieszczonych w węzłach D -wymiarowej sieci kubicznej. Reguły mechaniki statystycznej są następujące: (i) każda konfiguracja o energii E układu może wystąpić z prawdopodobieństwem $\exp(-E/k_B T)$, (ii) należy obliczyć funkcję podziału $Z(T) = \sum_{\text{konfig.}} \exp(-E/k_B T)$, w której zawarta jest cała potrzebna informacja o termodynamice układu. Najbardziej prawdopodobnymi wzbudzeniami są więc te o niskich energiach. To one są odpowiedzialne za niewystępowanie prawdziwego długozasięgowego uporządkowania, ale poza tym nie mają żadnych innych konsekwencji. Aby mówić o niszczeniu stanu nadciekłości albo o topieniu się dwuwymiarowego kryształu musimy uwzględnić bardzo mało prawdopodobne defekty topologiczne o wysokich energiach. Takimi defektami są w nadcieczy wiry, a w kryształach dyslokacje [15, 16, 17]. Trzeba tu zauważyć, że podobne idee proponował już nieco wcześniej Bierzeziński [18, 19], ale kiedy pracowaliśmy nad tym zagadnieniem nie wiedzieliśmy o tym. Z jakiegoś powodu nasza praca przyciągnęła więcej uwagi niż ta Bierzezińskiego.

Można oczywiście zadać pytanie, jaki związek ma topologia, która jest badaniem sfer mających N dziur, z układami, którymi się zajmowaliśmy i które wszystkie są płaskimi jednospójnymi dwuwymiarowymi powierzchniami nie mającymi żadnych dziur. Topologia, z której korzystamy jest wyznaczana przez fizykę układu



Ryc. 1. Na osi poziomej odłożona jest miara całkowitej gęstości powierzchniowej zaadsorbowanej błony, a na osi pionowej wielkość $-\Delta f$ będąca miarą zaadsorbowanej masy, która odłączyła się od oscylującego podłoża. Przedruk za zgodą z pracy M. Chestera, L.C. Yanga i J.B. Stephensena *Phys. Rev. Lett.* 31, 211 (1972) [© by APS]

i energii jego konfiguracji. Przemiany fazowe można sobie wyobrazić jako przejście [układu] od konfiguracji należącej do jednego sektora topologicznego do konfiguracji należącej do innego sektora; sektory te są zdefiniowane przez wartości pewnych niezmienników topologicznych. Rolę topologii można omówić porównując dwuwymiarowy magnetyk tworzony przez mające postać płaskich rotatorów [klasyczne] spiny o dwóch składowych (tzw. model płaskich rotatorów) z modelem Heisenberga, w którym spiny mają trzy składowe. Stan i -tego płaskiego rotatora można zadać pisząc

$$\mathbf{s}_i = (s_{ix}, s_{iy}) = s (\cos \phi_i, \sin \phi_i),$$

$$\Psi_i = s_{ix} + i s_{iy} = s e^{i\phi},$$

gdzie s jest wartością bezwzględną spinów, przyjmowaną zwykle za jednostkową. Rozpatrzmy teraz duży układ o rozmiarach $L_x \times L_y$ narzucając nań tzw. periodyczne warunki brzegowe (podobne rozumowanie można przeprowadzić także w przypadku innych warunków brzegowych). Kierunek namagnesowania w jakimś obszarze jest w przypadku modelu płaskich rotatorów wyznaczony przez kąt ϕ , który zmienia się wolno z położeniem. Mimo iż wartość tego kąta fluktuuje w dużym zakresie, jeśli układ jest duży, liczba wielokrotności 2π , o jaką kąt ϕ zmienia się wzdłuż drogi obiegającej cały układ⁴ jest *topologicznym* niezmiennikiem: liczby n_x i n_y dane przez

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{L_x} dx \frac{\partial \phi}{\partial x} = n_x,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{L_y} dy \frac{\partial \phi}{\partial y} = n_y,$$

definiują [więc] poszczególne stany metastabilne układu. Przejścia od jednego stanu metastabilnego do drugiego mogą zachodzić tylko wtedy, gdy para wirantywir utworzy się, rozdzieli i zniknie wskutek rekombinacji po obiegnięciu układu dookoła przez wir lub antywir. Proces ten powoduje zmianę n_x lub n_y o jedność; takiej zmianie stara się jednak zapobiec bariera energetyczna, której wysokość jest proporcjonalna do logarytmu rozmiarów układu.

Analogiczny dwuwymiarowy układ, składający się ze spinów mających po trzy składowe

$$\mathbf{s}_i = (s_{ix}, s_{iy}, s_{iz})$$

$$= s (\sin \theta_i \cos \phi_i, \sin \theta_i \sin \phi_i, \cos \theta_i),$$

nazywa się modelem Heisenberga. Wielkość taka jak

$(1/2\pi) \int_0^{L_x} dx (\partial \phi / \partial x)$ nie jest w tym przypadku topologicznym niezmiennikiem. Każda zmiana o 2π kąta azymutalnego ϕ wzdłuż drogi obiegającej cały układ może być zlikwidowana przez ciągłą zmianę kąta biegunowego θ . W rzeczy samej konfigurację dwuwymiarowego modelu Heisenberga charakteryzuje tylko jeden niezmiennik topologiczny

$$N = \frac{1}{4\pi} \int dx dy \sin \theta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right),$$

przyjmujący wartości całkowite $N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Jeśli traktujemy kierunek namagnesowania w każdym punkcie dwuwymiarowej powierzchni jak odwzorowanie tej przestrzeni w powierzchnię sfery jednostkowej, to niezmiennik N zlicza, ile razy przestrzeń „nawija się” na tę sferę. Niezmiennik ten nie ma żadnego znaczenia w mechanice statystycznej, bo wysokość bariery energetycznej rozdzielającej konfiguracje o różnych jego wartościach jest [tylko] rzędu jedności. Między różnymi sektorami topologicznymi (charakteryzowanymi różnymi wartościami liczby N) nie istnieje więc [praktycznie] żadna bariera, czego konsekwencją jest brak stanu uporządkowanego dwuwymiarowego magnetyka Heisenberga o $n = 3$ (n oznacza liczbę składowych spinu); w przypadku zaś dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów sektory topologiczne charakteryzowane wartościami n_x i n_y są rozdzielone nieskończoną [w granicy nieskończonego układu, tj. w tzw. granicy termodynamicznej] barierą energetyczną, czego konsekwencją jest występowanie przemiany fazowej, gdy fluktuacje zmieniają konfigurację [dużego, ale skończonego] układu z należącej do jednego sektora topologicznego na należącej do innego.

Można to zilustrować pokazując, jak konfigurację [spinów trójskładnikowego modelu Heisenberga] o $N = 1$ da się w sposób ciągły zdeformować do konfiguracji o $N = 0$. Prosty przykład konfiguracji o $N = 1$ jest taka, w której kąt θ jest ciągłą funkcją zmiennej $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ i zmienia się od $\theta = 0$ w $r = 0$ do $\theta = \pi$ przy $r = a$ i pozostaje równy π , gdy $r > a$. Kąt ϕ jest dany przez $\phi(x, y) = \arctg(y/x)$. Energia takiej konfiguracji, w której kąt θ zmienia się wolno z położeniem, jest równa

$$E = \frac{1}{2} J s^2 \int dx dy [(\nabla \theta)^2 + \sin^2 \theta (\nabla \phi)^2]$$

$$= \pi J s^2 \int_0^a dr r \left[\left(\frac{d\theta}{dr} \right)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \right].$$

Nawet jeśli kąt θ zmienia się pomiędzy $r = 0$, a $r = a$ liniowo, energia E pozostaje skończona i nie zależy od a . Oczywiście powyższy wzór na energię E przestaje być słuszny, gdy wartość a jest mała, ale wtedy liczba spinów

4. To znaczy wzdłuż drogi biegnącej od jednej krawędzi do przeciwległej; ponieważ narzucone są periodyczne warunki brzegowe, można uważać, że spiny tworzą sieć na torusie — wtedy taka droga obiega torus dookoła (przyp. tłum.).

mieszczących się w kole o promieniu a jest mała, więc każda bariera energetyczna [z nimi związana] nie może być wysoka i wartość topologicznego niezmiennika N może zostać zmieniona przez małe fluktuacje termiczne. Konkluzja jest więc taka, że przy skończonych [niezerowych] temperaturach uporządkowane stany dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów i pokrewnych mu modeli mogą istnieć, a stany uporządkowane trójściłkowego modelu Heisenberga nie mogą.

Zgadza się to z wynikami obliczeń numerycznych [14], późniejszymi wynikami uzyskanymi przez Poliakowa za pomocą grupy renormalizacji [20] i eksperymentami wykonanymi dla nadcięży [10, 11]. Zauważmy też, iż obliczenia Poliakowa zostały wykonane przy ograniczeniu się do pojedynczego sektora topologicznego o $N = 0$, tak że oba argumenty niezależnie potwierdzają niewystępowanie przemiany fazowej w dwuwymiarowym modelu Heisenberga.

3. Wiry w dwuwymiarowym modelu płaskich rotatorów

Rola jaką defekty topologiczne odgrywają w przemianach fazowych zachodzących w układach dwuwymiarowych została przez nas przedyskutowana w pracy [15] z 1972 roku, w której podaliśmy argument oparty na energii swobodnej defektu. Energię swobodną układu płaskich rotatorów oraz energię błony utworzonej z nadcięży można zapisać wzorem

$$\frac{H}{k_B T} = \frac{K_0(T)}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{a_0^2} (\nabla \theta(\mathbf{r}))^2,$$

w którym a_0 jest stałą sieci lub jakąś skalą mikroskopowego obciążenia, a

$$K_0(T) = \begin{cases} J/k_B T & \text{płaskie rotatory,} \\ \hbar^2 \rho_s^0(T)/m^2 k_B T & \text{błona z nadcięży.} \end{cases} \quad (1)$$

J jest tu tzw. energią oddziaływania wymiennego dwóch sąsiednich spinów o jednostkowej długości, tak więc

$$\begin{aligned} H[\{\mathbf{s}\}] &= \frac{J}{2} \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [s(\mathbf{r}) - s(\mathbf{r}')]^2 \\ &= J \sum_{\langle \mathbf{r}, \mathbf{r}' \rangle} [1 - \cos(\theta(\mathbf{r}) - \theta(\mathbf{r}'))]. \end{aligned}$$

W przypadku błony utworzonej z ^4He

$$H = \frac{1}{2} \int \frac{d^2 \mathbf{r}}{s_0^2} \rho_s^0(T, \mathbf{r}) \mathbf{v}_s^2,$$

gdzie $\mathbf{v}_s = (\hbar/m)\nabla\theta$ jest prędkością przepływu nadcięży, $\theta(\mathbf{r})$ jest fazą parametru porządku $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| \exp(i\theta(\mathbf{r}))$ charakteryzującego nadcięż, a $\rho_s^0(\mathbf{r})$ jest zależną od położenia niezrenormalizowaną gęstością nadcięży. Gęstość ta jest równa zeru w rdzeniu

wirów, a w pozostałych miejscach jest stała. Okazuje się, że jej dokładna zależność od położenia jest nieistotna, bo konsekwencje ma tylko fakt, że rdzeń każdego wiru wnosi pewną skończoną energię E_c . Powód fizyczny tego jest taki, że na utworzenie się rdzenia wiru potrzebny jest pewien wydatek energii swobodnej, bo rdzeń jest miejscem, w którym parametr porządku charakteryzujący nadcięż zeruje się. Możemy teraz zobaczyć, jak pojawia się tu topologia: każdy wir jest równoważny dziurze w [dwuwymiarowej] powierzchni; nadcięż pokrywa więc dwuwymiarową powierzchnię, mającą pewną liczbę otworów i $\oint_C d\theta = 2\pi n$ [(całka po zamkniętej krzywej otaczającej otwór)], tak iż wir można nazwać topologicznym defektem.

Ponieważ energia wzajemnego oddziaływania każdej pary wirów zależy od ich odległości logarytmicznie, hamiltonian takiego układu

$$\begin{aligned} \frac{H}{k_B T} &= -\pi K_0(T) \sum_{\mathbf{R}, \mathbf{R}'} n(\mathbf{R}) n(\mathbf{R}') \ln \left(\frac{|\mathbf{R} - \mathbf{R}'|}{a} \right) \\ &\quad - \ln y_0 \sum_{\mathbf{R}} n^2(\mathbf{R}), \end{aligned}$$

jest dokładnie hamiltonianem elektrycznie obojętnej plazmy coulombowskich ładunków. Można też ograniczyć się do rozpatrzenia tylko najmniejszych wartości $n = 0, \pm 1$ ładunku, gdyż [przyczynki wnoszone przez konfiguracje] o większej jego wartości są tłumione przez wyższe potęgi parametru $y_0 = \exp(-E_c/k_B T) \ll 1$ zwanego lotnością. Nasza pierwsza próba otrzymania rozwiązania tak postawionego problemu polegała na rozpatrzeniu pojedynczego odizolowanego wiru o jednostkowym krążeniu w układzie o rozmiarach $L \times L$. Ponieważ wir ma energię $\Delta E/k_B T = \pi K_0(T) \ln(L/a)$ i entropię $\Delta S = k_B \ln(L^2/a^2)$, jego energia swobodna wynosi $\Delta F = \Delta E - T\Delta S = k_B T(\pi K_0(T) - 2) \ln(L/a)$. Przy niskiej temperaturze T takiej, że $2k_B T < \pi J$, $\Delta F \rightarrow \infty$ i prawdopodobieństwo $P \propto \exp(-\Delta F/k_B T)$ powstania wiru dąży do zera, natomiast gdy $2k_B T > \pi J$, prawdopodobieństwo to dąży do jedności i [w układzie] powstanie skończona gęstość swobodnych wirów. Zdaliśmy sobie sprawę z Davidem, że możemy charakteryzować plazmę tworzoną przez n coulombowskich ładunków $q = +1$ i n ładunków $q = -1$ wprowadzając zależną od odległości funkcję dielektryczną $\epsilon(r)$ tak, by siła działająca pomiędzy parą ładunków próbnych rozdzielonych na odległość r była równa $2\pi K_0/r\epsilon(r) = 2\pi K(r)/r$. Energia [oddziaływania] takiej pary jest równa $E(r) = \int_a^r dr' K(r')/r' = U(r) \ln(r/a)$. Samozgodne równanie na $K(l) \equiv K(r = e^l)$ przybiera wtedy postać

$$K^{-1}(l) = K^{-1}(0) + 4\pi^3 y_0^2 \int_0^l dl' e^{4l' - 2\pi U(l')}.$$

To samozgodne równanie całkowe na efektywną ener-

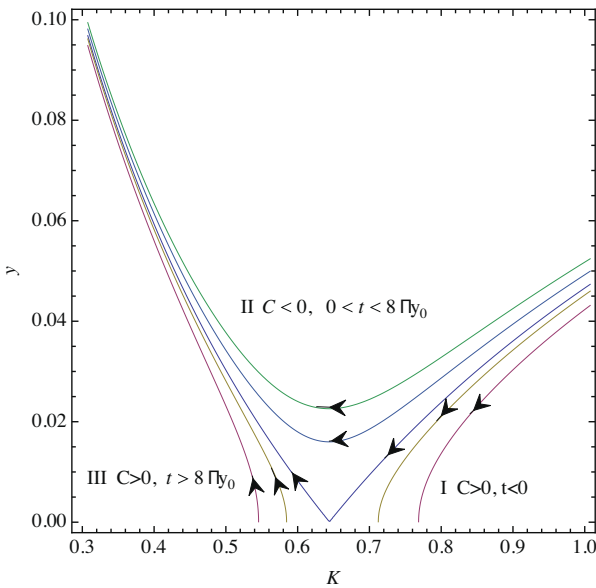
gię oddziaływania [15] wyprowadzili Kosterlitz i Thouless [16].

Jest jasne, iż przejście od fazy, w której występują związane dipole, do fazy, w której ładunki są swobodne, będzie zachodzić, gdy $\pi K(\infty) = 2$. Żeby jednak wyznaczyć zachowanie się układu przy temperaturach bliskich temperaturze krytycznej T_{cr} , konieczne jest rozwiązanie samozgodnego równania na $K(l)$ i to było tu głównym problemem. Kosterlitz i Thouless dokonali niestety niepotrzebnego przybliżenia, zastępując $U(r)$ przez $K(r)$ i znaleźli samozgodne rozwiązanie na $K(r)$ [w tym przybliżeniu]. Przybliżenie było uzasadnione tym, że $U(r) - K(r) \ll 1$, niemniej jednak dało niepoprawny wynik. Właściwe podejście podał Young [21]. Pokazał on, że równanie otrzymane przez Kosterlitz i Thoulessa jest równoważne równaniom grupy renormalizacji Kosterlitz [17]:

$$\frac{dK^{-1}}{dl} = 4\pi^3 y^2 + \mathcal{O}(y^4),$$

$$\frac{dy}{dl} = (2 - \pi K) y + \mathcal{O}(y^3).$$

Co godne podkreślenia, powyższe przybliżone (przez ograniczenie do najniższego rzędu w parametrze lotności y w wiru) równania grupy renormalizacji w sposób nieunikniony przewidują ściśle, wartość eksperymentalnie mierzalnej wielkości. Otrzymywane z nich trajektorie przebiegane⁵ przez parametry K i y pokazano na ryc. 2. Jeśli liczby wyznaczone eksperymentalnie są inne



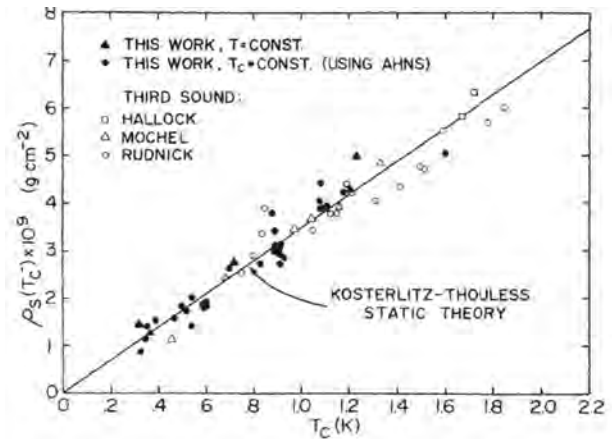
Ryc. 2. Dawane przez podane w tekście równania grupy renormalizacji biegnięcie parametrów dwuwymiarowego modelu płaskich rotatorów. Należy zauważyć, że gdy $T \leq T_{cr}$, $y(\infty) = 0$, a $K^{-1}(\infty) = \pi/2$.

5. W języku grupy renormalizacji mówi się o „biegnięciu” parametrów K i y (przyp. tłum.).

niż przewidziane teoretycznie, to albo eksperyment jest błędny, albo błędna jest cała teoria. Kluczowy eksperyment został wykonany przez Bishopa i Reppy’ego w roku 1978 [23]. Ku naszej wielkiej uldze i zadowoleniu teoretyczne przewidywanie [24]

$$\frac{\rho_s^R(T_{cr}^-)}{T_{cr}} = \frac{2m^2 k_B}{\pi \hbar^2} = 3,491 \times 10^{-8} \text{ g cm}^{-2} \text{ K}^{-1}$$

zostało potwierdzone doświadczalnie [23, 25]. Dane pochodzące z kilku różnych eksperymentów [26–30] przedstawiono na ryc. 3. Jest interesujące zauważyć, iż dane eksperymentalne zostały otrzymane i wykreślone zanim autorzy dowiedzieli się o naszym przewidywaniu. Można więc uznać je za doświadczalne potwierdzenie słuszności teorii BKT (Bierezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa).



Ryc. 3. Nieciągłość gęstości $\rho_s(T^-)$ nadciężu jako funkcja temperatury otrzymana z doświadczeń z trzecim dźwiękiem i skrętnościowymi oscylacjami. Ciągła linia pokazuje przewidywanie teorii statycznej. Wykres przedrukowany za pozwoleniem z pracy D.J. Bishopa i J.D. Reppy’ego *Phys. Rev. Lett.* **40**, 1727 (1978) [© by APS]

4. Topienie się dwuwymiarowych kryształów

Gruntowne eksperymentalne badanie zjawiska topienia się dwuwymiarowego [kryształu] zostało przeprowadzone przez grupę Mareta [32, 33, 34]. Uzyskane ilościowe [dane] zgadzają się z wykorzystującą topologiczne defekty teorią topienia się dwuwymiarowych kryształów podaną przez Younga, Halperina i Nelsona [35, 36]. Teoria ta wychodzi od wyrażenia

$$F = \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r} (2\mu_0 u_{ij}^2 + l u_{kk}^2),$$

$$u_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right),$$

w którym u_{ij} jest tensorem naprężeń, a u_i jest polem odkształceń, na liniową sprężystość trójkątnej sieci, która w dwóch wymiarach jest typową strukturą sieciową. Tensorowe pole naprężeń u_{ij} można rozłożyć na część

regularną ϕ_{ij} i część osobliwą $u_{ij}^{\text{sing}}(\mathbf{r})$, która jest skutkiem istnienia dyslokacji [37]. Dyslokacje charakteryzuje całka

$$\oint_C d\mathbf{u} = a_0 \mathbf{b}(\mathbf{r}) = a_0 (n(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_1 + m(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{e}}_2),$$

z wektora $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ odkształcenia obliczona po krzywej C obejmującej topologiczny defekt lub dyslokację. $\mathbf{b}(\mathbf{r})$ jest tu bezwymiarowym wektorem Burgersa, a_0 jest stałą sieci krystalicznej, a n i m są liczbami całkowitymi. W ramach teorii sprężystości wykorzystującej przybliżenie continuum można pokazać [36], że

$$u_{ij}^{\text{sing}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\mu} \epsilon_{ik} \epsilon_{jl} \frac{\partial^2}{\partial r_k \partial r_l} - \frac{\lambda}{4\mu(\lambda + \mu)} \delta_{ij} \nabla^2 \right) \times a_0 \sum_{\mathbf{r}'} b_m G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$G_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\frac{K_0}{4\pi} \sum_{n=1}^2 \epsilon_{nm} (r - r')_n \left[\ln \left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} \right) + C \right].$$

Otrzymuje się stąd wzór na energię zbioru dyslokacji wyrażoną przez wektory Burgersa $\mathbf{b}(\mathbf{r})$:

$$\frac{H_D}{k_B T} = -\frac{K_0(T)}{8\pi} \int d^2 \mathbf{r} d^2 \mathbf{r}' \left(\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{b}(\mathbf{r}') \ln \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{a} - \frac{[\mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')][\mathbf{b}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \right).$$

W naszej pracy pominięliśmy drugi człon w tym wzorze przyjmując, że jest on mniej istotny niż wyraz z logarytmem. Był to nieszczęśliwy błąd. Został on naprawiony przez Halperina i Nelsona, którzy przewidzieli istnienie obecnie słynnej heksatycznej fazy płynu o sześciokrotnej symetrii orientacyjnej. My przyjęliśmy, że rozdzielanie się dyslokacji prowadzi do powstania izotropowego płynu bezpośrednio, co jak teraz wiadomo, jest nieprawdą. Proces topienia się dwuwymiarowych kryształów przebiega w dwóch etapach. Przy temperaturze T_m kryształ topi się przez rozdzielanie się dyslokacji przechodząc w heksatyczny płyn i dopiero przy temperaturze $T_i > T_m$ zachodzi przemiana, w której algebraiczny porządek ukierunkowania zostaje zniszczony przez rozdzielanie się dysklinacji, co prowadzi do oczekiwanej przy wysokiej temperaturze fazy izotropowego płynu [35, 36].

Przewidywania tej teorii są podobne do przewidywań dotyczących błon tworzonych przez nadciekły ^4He . Odpowiedni skok zrenormalizowanego (tj. mierzonego) modułu Younga jest dany wzorem

$$\tilde{K}_R(T_m^-) = \lim_{T \rightarrow T_m^-} \frac{4\tilde{\mu}_R(T) (\tilde{\mu}_R(T) + \tilde{\lambda}_R(T))}{2\tilde{\mu}_R(T) + \tilde{\lambda}_R(T)} = 16\pi.$$

$\tilde{\mu}_R(T)$ jest tu wartością zrenormalizowanej wielkości $\mu/k_B T$. Jednym z interesujących, choć niesprawdzal-

nych eksperymentalnie przewidywań tej teorii jest funkcja struktury

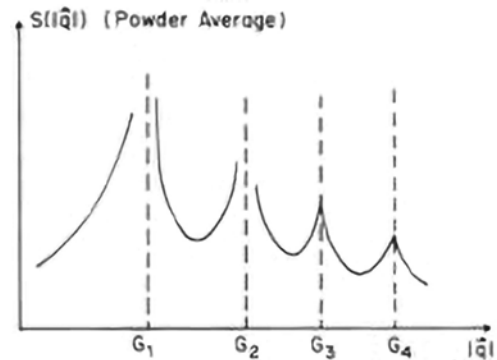
$$S(\mathbf{q}) = \langle |\rho(\mathbf{q})|^2 \rangle = \sum_{\mathbf{r}} e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} \langle e^{i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{u}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{0}))} \rangle,$$

[która determinowałaby] rozpraszanie promieni X [na dwuwymiarowym kryształ]. Nie ma ona braggowskich maksimumów typu funkcji delta; zamiast tego ma maksimum wyrażające się wzorem

$$S(\mathbf{q}) \sim |\mathbf{q} - \mathbf{G}|^{-2+\eta_G(T)},$$

$$\eta_G(T) = \frac{k_B T |\mathbf{G}|^2}{4\pi} \frac{3\mu_R(T) + \lambda_R(T)}{\mu_R(T)(2\mu_R(T) + \lambda_R(T))}.$$

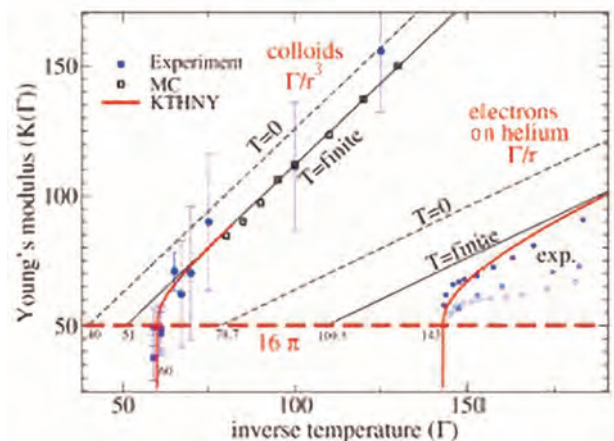
Widać, że przy małych wartościach $|\mathbf{G}|$ ta funkcja staje się nieskończona, gdy $\mathbf{q} = \mathbf{G}$. Przewidywany kształt funkcji struktury, która by była mierzona przez rozpraszanie promieni X , jest więc taki jak pokazany na ryc. 4. Jest to jedno z charakterystycznych przewidywań dyslokacyjnej teorii topnienia. Niestety nie można go zweryfikować eksperymentalnie, gdyż aktualnie dostępne rozmiary układów i ich jakość nie są jeszcze wystarczające.



Ryc. 4. Schematyczny wygląd funkcji struktury $S(\mathbf{q})$ dwuwymiarowego kryształu. Gdy $T \leq T_m$ jest ona rozbieżna przy małych wartościach $|\mathbf{G}|$, jak $|\mathbf{q} - \mathbf{G}|^{-2+\eta_G}$; przy dużych zaś wartościach $|\mathbf{G}|$ ma „dziubki”, czyli skończone nieciągłości pochodnej. Gdy $T > T_m$, wszystkie jej maksima mają skończoną wysokość, a wysokość maksymalna jest równa $\sim \xi_+^{-2+\eta_G}(T)$. Wykres przedrukowany za zgodą z pracy [34] © by CUP⁶

Jednym z głównych mierzalnych przewidywań dyslokacyjnej teorii topnienia jest wartość zrenormalizowanego (tj. mierzonego) modułu Younga. Zgodność teorii i danych doświadczalnych pokazana na ryc. 5 jest tu godna uwagi. Choć przewidywania tej teorii otrzymano już w latach siedemdziesiątych [35, 36], to pomiary [31, 32] zostały wykonane dopiero kilka dziesięcioleci później z powodu trudności w zrealizowaniu odpowiednich układów eksperymentalnych. Układy dwuwymiarowe są bowiem — ogólnie rzecz ujmując — bardzo podatne na zaburzenia pochodzące od podłoża, na którym są one realizowane, a którego wpływu teoria nie uwzględnia.

6. Redakcja PF przeprasza za nie najlepszą czytelność niektórych elementów rycin w tym artykule — takiej jakości ilustracje zawiera oryginalny wykład udostępniony przez Nobel Foundation.



Ryc. 5. Moduł Younga $K_R(T)$ jako funkcja odwrotności efektywnej temperatury Γ . Linia ciągła jest otrzymanym przez Halperina i Nelsona przewidywaniem teorii dyslokacyjnej; punkty są wynikami doświadczalnymi. Przedruk za zgodą z *J. Phys. Condens. Matter* 17 (2005) S3579–S3586 doi: 10.1088/0953-8984/17/45/051 [© by IOP, 2005]

W naszych oryginalnych pracach rozpatrywaliśmy topienie się kryształów, ale nie przedyskutowaliśmy fazy płynnej modelowanej za pomocą periodycznej sieci o odpowiedniej koncentracji swobodnych dyslokacji. Ciało stałe o periodycznej strukturze może wykazywać dwa rodzaje uporządkowania: uporządkowanie translacyjne i uporządkowanie kierunkowe charakteryzujące orientację osi kryształu. Odpowiadającymi im parametrami porządku są gęstość $\rho(\mathbf{r})$ i kierunkowy parametr porządku $\psi_6(\mathbf{r})$:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}) + \sum_{\mathbf{G}} |\rho_{\mathbf{G}}(\mathbf{r})| e^{i\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}(\mathbf{r})},$$

$$\psi_6(\mathbf{r}) = \exp(6i\theta(\mathbf{r})).$$

Defektami topologicznymi są (i) dyslokacje odpowiedzialne za topienie się ciała stałego polegające na przejściu do fazy uporządkowanego heksatycznego płynu oraz (ii) dysklinacje (wirry) odpowiedzialne za przejście do fazy wysokotemperaturowej, którą jest płyn izotropowy [35, 36].

Teoria ta została opracowana przez Younga [35] oraz przez Halperina i Nelsona [36]. Daje ona bardzo szczegółowe przewidywania, które zostały potwierdzone przez eksperyment [31, 32]. Podsumowuje je wykres pokazany na ryc. 5. Jednym z najbardziej czułych testów tej teorii są, jak dotąd, wyniki Kapfera i Krautha [38], którzy wykonali wielkoskalowe symulacje uwzględniające 10^6 cząstek oddziałujących wzajemnie za pośrednictwem odpychającego potencjału $V(r) = \epsilon(\sigma/r)^n$. Ustalili oni, że w przypadku potencjałów długozasięgowych (o $n < 6$) topienie się kryształu rzeczywiście zachodzi tak, jak to przewiduje scenariusz Kosterlitz–Thouless–Halperina–Nelsona–Younga poprzez pośrednią fazę heksatycznego płynu. Wynik ten obejmuje eksperymenty z koloidami (odpowiadającymi

potencjałowi o $n = 3$) [31, 32], a także eksperymenty z elektronami na powierzchni utworzonej z ^4He (potencjał o $n = 1$) [39]. Natomiast gdy $n > 6$, przemiana płynu heksatycznego w izotropowy staje się przemianą pierwszego rodzaju. Wynik ten zgadza się z symulacjami [dynamiki] gazu twardych kul (model ten odpowiada oddziaływaniu o $n = \infty$). Należy też zauważyć, że symulacje te zostały wykonane dla układów większych niż [rzeczywiste] układy eksperymentalne.

Teoria Beriezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa została też zastosowana do zjawiska nadprzewodnictwa cienkich błon. W naszej oryginalnej pracy stwierdziliśmy, że prawdziwe nadprzewodnictwo w dwuwymiarowych nadprzewodzących błonach nie może występować z powodu skończonej wartości głębokości wnikania $\lambda(T)$, która ogranicza zasięg logarytmicznego wzajemnego oddziaływania wirów. Oddziaływanie wirów rozdzielonych odległością [rzędu] $\lambda(T)$ zachowuje się jak $1/r$, czyli są one zawsze, przy dowolnej temperaturze $T > 0$, swobodne, co niszczy nadprzewodnictwo. Mimo iż nasz argument jest poprawny, w wielu nadprzewodnikach będących cienkimi błonami głębokość wnikania może być rzędu $\mathcal{O}(1 \text{ cm})$, co jest typowym rozmiarem układu. Ponieważ stosuje się niewielkie prądy, a głębokość ta jest [z praktycznego punktu widzenia] tak duża, że zachowanie się układu nie różni się od zachowania odpowiadającego granicy $\lambda = \infty$ [40, 41]. Teoria ta została zastosowana także do dwuwymiarowych warstw zimnych atomów [42, 43]. Jej zgodność [z wynikami doświadczalnymi] jest w tym przypadku rozsądna i może być w przyszłości jeszcze lepsza.

Literatura

1. D. J. Thouless, *Phys. Rev.* **187** 732 (1969).
2. P. W. Anderson, G. Yuval, D. R. Hamann *Phys. Rev. B* **1** 4464 (1970).
3. R. E. Peierls, *Helv. Phys. Acta.* **7 Suppl.** II 81–3 (1934).
4. R. E. Peierls, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **5** 177–222 (1935).
5. N. D. Mermin, *Phys. Rev.* **176** 250–4 (1968).
6. N. D. Mermin, H. Wagner, *Phys. Rev. Lett.* **17** 1133–6 (1966).
7. P. C. Hohenberg, *Phys. Rev.* **158** 383–6 (1967).
8. B. J. Alder, T. E. Wainwright, *J. Chem. Phys.* **33** (1960).
9. B. J. Alder, T. E. Wainwright, *Phys. Rev.* **127** 359–61 (1962).
10. M. Chester, L. C. Yang, J. B. Stephens, *Phys. Rev. Lett.* **29** 211–4 (1972).
11. M. Chester, L. C. Yang, *Phys. Rev. Lett.* **31** 1377–80 (1973).
12. H. E. Stanley, T. A. Kaplan, *Phys. Rev. Lett.* **17** 913–5 (1966).

13. H. E. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **20** 589–92 (1968).
14. M. A. Moore, *Phys. Rev. Lett.* **23** 861–3 (1969).
15. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **5** L124–6 (1972).
16. J. M. Kosterlitz, D. J. Thouless, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **6** 1181–203 (1973).
17. J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046–60 (1974).
18. V. L. Berezinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59** 907 (1970); *JETP* **32** 493 (1971).
19. V. L. Berezinskii, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **61** 1144 (1971); *JETP* **34** 601 (1972).
20. A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B.* **59** 79–81 (1975).
21. A. P. Young, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **11** L453–5 (1978).
22. J. M. Kosterlitz, *J. Phys. C: Solid State Phys.* **7** 1046–60.
23. D. J. Bishop, J. D. Reppy, *Phys. Rev. Lett.* **40** 1727–30 (1978).
24. D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, *Phys. Rev. Lett.* **39** 1201 (1977).
25. D. J. Bishop, J. D. Reppy, *Phys. Rev. B.* **22** 5171 (1980).
26. I Rudnick, *Phys. Rev. Lett.* **40** 1454 (1978).
27. J. Maps, R. B. Hallock, *Phys. Rev. Lett.* **47** 1533 (1981).
28. J. Maps, R. B. Hallock, *Phys. Rev. B.* **27** 5491 (1983).
29. J. E. Rutledge, W. L. McMillan, J. M. Mochel, *Phys. Rev. B.* **18** 2155 (1978).
30. A. L. Buck, J. M. Mochel, *Physica B.* **107** 403 (1980).
31. J. Zanghellini, P. Keim, H. H. von Grünberg, *J. Phys: Condens. Matter* **17** S3579 (2005).
32. H. H. von Grünberg, P. Keim, G. Maret, *Soft Matter vol 3: Colloidal Order from Entropic and Surface Forces*, eds. G. Gomper, M. Schick (Weinheim: Wiley) pp. 40–83 (2007).
33. U Gasser, C. Eisenmann, G. Maret, P. Keim, *Chem. Phys. Chem.* **11** 963 (2010).
34. D. R. Nelson, *Defects and Geometry in Condensed Matter Physics*, Cambridge University Press (2002).
35. A. P. Young, *Phys. Rev. B.* **19** 1855 (1979).
36. B. I. Halperin, D. R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **41** 121 (1978); *Phys. Rev. B.* **19** 2457 (1979).
37. F. R. N. Nabarro, *Theory of Dislocations* Oxford University Press (1967)
38. S. C. Kapfer, W. Krauth, *Phys. Rev. Lett.* **114** 035702 (2015).
39. C. C. Grimes, G. Adams, *Phys. Rev. Lett.* **42** 795 (1979).
40. D. J. Resnick, J. C. Garland, J. T. Boyd, S Shoemaker, R. S Newrock, *Phys. Rev. Lett* **47** 1542 (1981).
41. A. F. Hebard, A. T. Fiory, *Phys. Rev. Lett.* **50** 1603 (1983).
42. Z. Hadzibabic, P. Krüger, M. Chenau, B. Battelier, J. Dalibard, *Nature* **441** 1118 (2006).
43. M. Holzmann, G. Baym, J-P Blaizot, F. Laloë, *Proc Natl Acad Sci* **104** 1476 (2007).

Przekład Piotr Chankowski



Topologiczna materia kwantowa¹

Wykład noblowski wygłoszony 8 grudnia 2016

John F. Duncan M. Haldane

Department of Physics, Princeton University

Opublikowany w języku polskim za zgodą Nobel Foundation

©the Nobel Foundation 2016

Przekład dokonany przy wsparciu finansowym Fundacji Pro-Physica

Streszczenie. Omawiam historię i okoliczności trzech wymienionych w tytule przyznania tej Nagrody Nobla odkryć: topologicznego wzoru „TKNN” dotyczącego całkowitego efektu Halla podanego przez Davida Thoulessa i jego współpracowników, izolatora Cherna, czyli anomalnego kwantowego efektu Halla oraz rolę jaką odegrał on w późniejszym odkryciu topologicznych izolatorów niezmienniczych względem operacji odwrócenia czasu i wreszcie nieoczekiwanego odkrycia topologicznego stanu typu cieczy spinowej kwantowego łańcucha antyferromagnetycznego utworzonego ze spinów $S = 1$, który stanowił pierwszy przykład topologicznej kwantowej materii. Powiem też, jak te pierwsze odkrycia doprowadziły do powstania niezwykle interesującej i obecnie wyjątkowo aktywnie rozwijanej dziedziny, jaką jest fizyka „topologicznej materii”.

Słowa kluczowe: topologiczne stany kwantowe, efekt Halla, faza Berry’ego, dwuwymiarowe izolatory topologiczne, spinowy efekt Halla, jednowymiarowe układy spinów

Abstract. I will describe the history and background of three discoveries cited in this Nobel Prize: The “TKNN” topological formula for the integer quantum Hall effect found by David Thouless and collaborators, the Chern Insulator or quantum anomalous Hall effect, and its role in the later discovery of time-reversal-invariant topological insulators, and the unexpected topological spin-liquid state of the spin $S=1$ quantum antiferromagnetic chain, which provided an initial example of topological quantum matter. I will summarize how these early beginnings have led to the exciting, and currently extremely active, field of “topological matter.”

Keywords: topological quantum states, Hall effect, Berry’s phase, two-dimensional topological insulators, spin Hall effect, one-dimensional spin systems

Na to, co dziś jest znane pod nazwą *topologicznych stanów kwantowych* materii skondensowanej po raz pierwszy natknięto się około roku 1980 przy okazji odkrycia całkowitego (Klitzing i inni, 1980), a później ułamkowego (Tsui i inni, 1982) kwantowego efektu Halla w dwuwymiarowych układach elektronów w urządzeniach półprzewodnikowych oraz przy okazji teoretycznego odkrycia oddzielonych przerwą od reszty widma energetycznego splątanych stanów typu ciecz spinowa układów całkowitych spinów — *kwantowych łańcuchów spinowych* — (Haldane i inni, 1986). Występowanie takich stanów kryształów tworzonych przez organiczne łańcuchy molekuł NENP² zostało później potwierdzone eksperymentalnie (Buyers i inni, 1986). Wspólną cechą tych dwóch odkryć było to, że były zupełnie nieoczekiwane oraz zdziwienie, jakie wywołały: wyłamywały się

one bowiem z ustalonych już zdawałoby się paradygmatów *fizyki materii skondensowanej* (nazywanej dawniej *fizyką ciała stałego*). Nie było od razu widoczne, że między tymi dwiema niespodziankami może istnieć jakiś związek; teraz jednak, zwłaszcza dzięki pracy klasyfikującej Xiao-Gang Wena (Chen i inni, 2013), rozumiemy, że ich wspólnym mianownikiem jest to, iż występują w nich splątane „topologicznie nietrywialne” stany materii, które różnią się zasadniczo od wcześniej znanych jej stanów topologicznie trywialnych i że to właśnie jest głównym źródłem ich nieoczekiwanych właściwości.

Topologia jest działem matematyki wykorzystywanym pierwotnie do klasyfikowania kształtów trójwymiarowych obiektów takich jak piłka futbolówka, piłka do rugby (lub amerykańskiego futbolu), kule, kubki do kawy (bez ucha), które są „topologicznie trywialnymi” powierzchniami bez otworów oraz takich jak bajgle, ciasto pączka, prele i filiżanki do kawy z uszkami, które są przykładami „nietrywialnych” powierzchni z jednym lub więcej otworami. Mrówka poruszająca się po takiej „nietrywialnej” powierzchni może obejść zamkniętą pętlę (czyli przejść drogę zaczynającą się i kończącą w tym

1. Nagrodę Nobla z fizyki w roku 2016 podzielili między siebie David J. Thouless, F. Duncan M. Haldane i J. Michael Kosterlitz. Artykuł jest tekstem jednego z dwóch wykładów wygłoszonych z tej okazji (przyp. red.).

2. NENP to catena-(mu-nitrito)-bis(ethylenediamine)nickel(II) perchlorate czyli związek $\text{Ni}(\text{C}_2\text{H}_8\text{N}_2)_2\text{NO}_2\text{ClO}_4$.

samym punkcie), która nie może zostać ściągnięta do [dowolnie]³ małego kólecčka wokół jednego punktu powierzchni. Pierwotne idee topologii zostały przez matematyków znacznie uogólnione i uczynione abstrakcyjnymi, ale zasadnicza idea, że pewne różne obiekty są *topologicznie równoważne*, jeśli tylko mogą być w sposób gładki przekształcone jedne na drugie, pozostaje wciąż ta sama. Kluczową ideą jest też to, że różne topologiczne [typy obiektów] są klasyfikowane liczbami całkowitymi, takimi jak liczba otworów powierzchni, które nie mogą zmieniać się w sposób ciągły.

Z kolei splątanie jest jedną z zasadniczych cech mechaniki kwantowej. Polega ono na tym, że jeśli stan układu jest reprezentowany przez stany kwantowe jego podukładów (jest tak zazwyczaj, gdy układ składa się z kilku przestrzennie rozdzielonych części), to pomiar jakiejś właściwości jednego z tych podukładów wpływa na stan pozostałych. Topologia *topologicznych stanów materii* uhonorowanych tą nagrodą Nobla jest bardziej abstrakcyjna niż [topologia] kształtu obiektów codziennego użytku takich jak futbolówki i filizanki do kawy. Rozróżnia ona bowiem typy *kwantowego splątania*, które nie mogą być w sposób gładki przekształcone jeden w drugi przy warunku zachowania pewnych symetrii. Typ splątania stanu kwantowego jest *topologicznie trywialny*, gdy może być w sposób gładki przekształcony w stan, w którym każda część układu jest w niezależnym stanie, tak iż pomiar wykonany na jednej części nie wpływa na stan pozostałych części (taki stan całego układu nazywa się *stanem iloczynowym*). W przypadku kwantowych układów spinów (wykorzystywanych jako modele teoretyczne niemetalicznych materiałów magnetycznych) okazało się, że niemal wszystkie wcześniej przewidziane teoretycznie ich stany były topologicznie trywialne i z tego powodu nie obserwowano zaskakujących właściwości stanów topologicznych nietrywialnych.

Trochę czasu zajęło zanim powszechnie zrozumiano, że dzięki tym odkryciom miała się wyodrębnić szeroka klasa nowych „topologicznych stanów materii”. Pierwszym kamieniem milowym na tej drodze było odkrycie przez Davida Thoulessa i jego współpracowników: Mahito Kohmoto, Marcela den Nijsa i Petera Nightinghale (TKNN) ważnego wzoru (Thouless i inni, 1982), w którym rychło fizyk matematyczny Barry Simon (Simon, 1983) rozpoznał po prostu *niezmiennik pierwszej klasy Cherna* występujący w abstrakcyjnej matematycznej topologii tzw. wiązek włóknistych o grupie strukturalnej $U(1)$ i w istotny sposób wiążący się z postępującym równoległym w owym czasie rozwojem badań nad tzw. adia-

batyczną fazą kwantową odkrytą w roku 1983 przez Michaela Berry’ego (Berry, 1984). Ponieważ przedstawiam tu także część nagrodzonej Noblem pracy Davida Thoulessa, powiem o tym w moim wykładzie najpierw i znacznie od kwantowego efektu Halla, za który zostały już przyznane dwie nagrody Nobla (w roku 1985 i 1998).

Elektrony o ładunku e uwięzione na dwuwymiarowej powierzchni, przez którą przechodzi pole magnetyczne o indukcji B , poruszają się po okręgach zwanych *orbitami Landaua*. Zgodnie z mechaniką kwantową taki ruch okresowy powoduje powstanie zbioru dyskretnych poziomów energii każdego z elektronów. Poziomy te są zwane *poziomami Landaua*. W najprostszym (półklasycznym) modelu okres $T = 2\pi/\omega_c$ takiego ruchu po orbicie kołowej nie zależy od jej promienia i dozwolone energie poziomów Landaua są takie, jak oscylatora harmonicznego, tj. $(n + \frac{1}{2})\hbar\omega_c$, gdzie $\omega_c = eB/m_e$ jest tzw. *częstością cyklotronową*. Jeśli przyjąć, że powierzchnia charakteryzuje się translacyjną niezmienniczością, czyli że żaden z jej punktów nie jest wyróżniony, to energia każdego stanu należącego do danego poziomu Landaua jest niezależna od położenia środka orbity i degeneracja poziomu jest bardzo wysoka (makroskopowa). Liczba niezależnych jednocząstkowych stanów należących do danego poziomu Landaua jest proporcjonalna do pola powierzchni A układu; w istocie jest ona równa BA/Φ_0 , gdzie $\Phi_0 = h/e$ jest kwantem (Londonów) strumienia pola magnetycznego.

Zasada wykluczania Pauliego mówi, że każdy niezależny jednocząstkowy stan kwantowy może być obsadzony przez nie więcej niż jeden elektron. Poziomy Landaua są trochę analogiczne do poziomów $1s, 2p, 3d, \dots$ otrzymywanych w ramach prostego, znanego z licealnych lekcji chemii, kwantomechanicznego modelu atomu. Jednak w odróżnieniu od tych atomowych poziomów, które mają odpowiednio 2, 6, 10, ... dostępnych do obsadzenia stanów, liczba stanów składających się na pojedynczy poziom Landaua jest olbrzymia (przypuszczalnie rzędu 10^{12} w rzeczywistych próbkach) i zmienia się z przyłożonym polem magnetycznym. Ponieważ liczba elektronów mogących poruszać się po dwuwymiarowej powierzchni jest w zasadzie ustalona, wydaje się, że można by dopasować liczbę dostępnych stanów do liczby elektronów, dobierając odpowiednio pole magnetyczne, tak by w stanie podstawowym układu całkowicie zapełniony był jeden lub więcej poziomów Landaua, a pozostałe były zupełnie nieobsadzone; powstawałaby w ten sposób przerwa energetyczna rozdzielająca najwyższy obsadzony (zwany w chemii kwantowej HOMO od ang. *highest occupied molecular orbital*) i pierwszy nieobsadzony (zwany LUMO od ang. *lowest unoccupied molecular orbital*) poziom, co czyniłoby układ podobnym do naturalnego (a nie powsta-

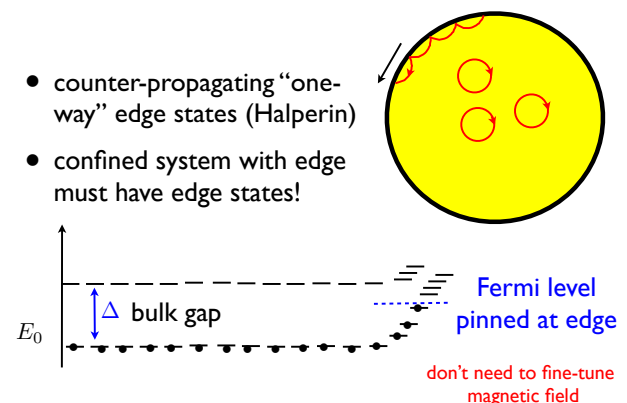
3. Teksty w nawiasach kwadratowych dodał tłumacz z uwagi na zbyt zwięzły, a czasem wręcz niezrozumiały język oryginału (przyp. red.).

tego w wyniku domieszkowania) półprzewodnika. Przy takich sztucznych modelowych warunkach proste obliczenie hallowskiej przewodności σ^{xy} układu rzeczywiście dałoby efekt Halla charakteryzujący się uniwersalną wartością $\sigma^{xy} = ne^2/h$ (która zależy tylko od stałych podstawowych, niezależnych od materiału oraz od liczby całkowitej n , tj. liczby całkowicie obsadzonych poziomów Landaua), odpowiadający temu, co zmierzył von Klitzing.

Błąd popełniony w takim naiwnym wyjaśnieniu całkowitego kwantowego efektu Halla polega na tym, że wymaga ono bardzo delikatnego dopasowania natężenia pola magnetycznego. Tymczasem uwagę von Klitzinga na ten efekt zwróciła właśnie jego niezależność od dokładnej wartości pola. „Włączał” on pole przykładając je do urządzenia, przez które przepływał ustalony prąd (stabilizowany przez źródło prądu stałego) i zaobserwował, że gdy układ osiągał już stan stacjonarny, cyfrowy woltomierz pokazywał zawsze to samo napięcie Halla między przeciwległymi bocznymi brzegami próbki z dokładnością do wielu cyfr znaczących. (Legenda mówi, że von Klitzing w pierwszej chwili pomyślał, że woltomierz jest zepsuty!) Oczywiście, każdorazowe „włączanie” pola magnetycznego przebiegało trochę inaczej, zatem końcowe pole nigdy nie mogło być dokładnie takie samo w kolejnych uruchomieniach eksperymentu i z pewnością nigdy przypadkowo nie mogło przyjmować dokładnie „magicznej wartości”, jaką musiałoby mieć w podanym wyżej naiwnym wyjaśnieniu efektu. Wielce szczęśliwą okolicznością było to, że von Klitzing włączał pole magnetyczne utrzymując ustalony prąd płynący przez próbkę, a nie włączał prądu mając już ustalone pole, gdyż wówczas koincydencja polegająca na takim samym odczycie woltomierza nigdy by się nie zdarzyła!

Rzeczywiste próbki, nawet gdy są względnie czyste, nie odznaczają się translacyjną niezmienniczością, która powoduje, że wszystkie stany należące do danego poziomu Landaua mają dokładnie taką samą energię. Lokalny potencjał elektrostatyczny zmienia się przypadkowo od punktu do punktu, zwiększając energię elektronów na jednych orbitach i zmniejszając energię na innych, zależnie od tego jaką ma wartość w środku danej kołowej orbity Landaua. Powoduje to pewne poszerzenie poziomów Landaua. Pierwsze próby wyjaśnienia efektu [zaobserwowanego przez von Klitzinga] skupiły się na skutkach takiego nieporządku. Ustalono wtedy, że jakkolwiek w dwuwymiarowych układach elektronów wykazujących tego rodzaju nieporządek istnieją stany zlokalizowane, to w obecności pola magnetycznego sytuacja ulega zmianie, wówczas bowiem środki [większości] orbit Landaua wykonują powolną precesję wokół lokalnego ekstremum potencjału (jej kierunek zależy od

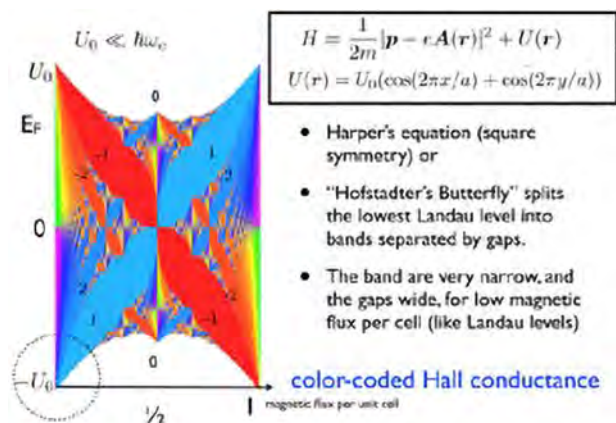
tego, czy jest to minimum, czy maksimum); orbity te odpowiadają stanom zlokalizowanym. Okazuje się jednak, że środki orbit odpowiadających niektórym energiom bliskim środka przedziału energii poszerzonego poziomu Landaua przemieszczają się po torach mających kształt bardzo wydłużonych elips i stany odpowiadające tym orbitom nie są już zlokalizowane, lecz rozprzestrzenione. W takim obrazie przerwa pomiędzy stanami HOMO i stanami LUMO nie istnieje: mają one taką samą energię (nazywaną *energiją Fermiego*) i, gdy natężenie pola magnetycznego zmienia się, energia Fermiego przesuwa się tak, by utrzymać poziomy o niższych od niej energiach całkowicie obsadzone, a te o energiach wyższych całkowicie puste. Całkowita liczba n wyznaczana przez von Klitzinga zmienia się zaś tylko wtedy, gdy energia Fermiego przechodzi przez wyróżnioną wartość, przy której istnieją stany *rozprzestrzenione*. Wyjaśnia to obserwowany efekt w terminach dość zawiłej teorii lokalizacji [stanów], która na pierwszy rzut oka nie ma oczywistego związku z topologią. To co jest tu (dziś oczywiste) bardzo charakterystyczną właściwością topologiczną stało się jasne, gdy Bert Halperin zwrócił uwagę na istotną rolę stanów brzegowych (Halperin 1982).



Ryc. 1. Prosty obraz poziomów energii występujących w problemie całkowitego kwantowego efektu Halla. Przerwa energetyczna we wnętrzu próbki jest stabilizowana dzięki przechodzeniu przez poziom Fermiego bezszczylinowego widma energii stanów brzegowych. (Poziomy energii są pokazane w funkcji odległości od środka próbki mającej kształt dysku.)

W obrazie półklasycznym stany brzegowe są łatwo widoczne jako tzw. przeskakujące orbity, wykonujące precesję wzdłuż brzegu układu. Dzieje się tak, gdy kołowa orbita Landaua cząstki naładowanej musiałaby przeciąć brzeg; cząstka odbija się wtedy od niego i przechodzi na inną orbitę kołową, tak jak to widać z ryc. 1. W rezultacie wygląda to, jak gdyby orbita cząstki wykonywała precesję w kierunku przeciwnym do kierunku, w którym cząstka obiega orbitę kołową. Nawet przy braku nieporządku wewnątrz próbki, tj. gdy kolejne poziomy Landaua są oddzielone od siebie przerwami, widmo energii stanów brzegowych układu jest ciągłe.

Przechodzi ono przez poziom Fermiego, co umożliwia przepływ spektralny, czyli przechodzenie elektronów obsadzających poziomy Landaua we wnętrzu próbki do stanów brzegowych i na odwrót. Eliminuje to konieczność dokładnego dostrajania wartości pola, aby we wnętrzu próbki utrzymać poziomy Landaua poniżej energii Fermiego całkowicie wypełnione, a te powyżej całkowicie puste. [Ponieważ liczba elektronów jest ustalona,] całkowita liczba [zapełnionych] stanów nie może się zmienić, więc przy zmianach natężenia pola magnetycznego [powodujących zmiany liczb stanów poszczególnych poziomów Landaua], elektrony muszą przepływać z jednego poziomu Landaua do drugiego: stany brzegowe, których widmo energii nie ma przerwy, stanowią konieczną „rurę hydrauliczną” łączącą poziomy Landaua i umożliwiającą redystrybucję [zapełnionych] stanów [między te poziomy] przy zmianach pola magnetycznego.



Ryc. 2. Widmo energii elektronów poruszających się w periodycznej sieci umieszczonej w jednorodnym polu magnetycznym zwane *motylem Hofstadtera*. Poziomy energii pokazane są tu w funkcji strumienia pola magnetycznego przechodzącego przez komórkę jednostkową. Struktura widma w lewym dolnym rogu jest niemal taka jaką tworzy układ zwykłych poziomów Landaua. Kolory, którymi zaznaczone są przerwy energetyczne rozdzielające podpasma, odpowiadają różnym całkowitym liczbom n wyznaczającym skwantowanie efektu Halla w sytuacji, gdy poziom Fermiego leży w danej przerwie. (Barwny wykres widma udostępnił D. Osadchy i J. Avron)⁴

Istniejące w sposób nieunikniony stany brzegowe, które transportują cząstki tylko w jednym kierunku dookoła brzegu [próbki] pozwalają zrozumieć stabilność kwantowego efektu Halla (QHE) jako skutek wpływu brzegu układu. Pożyteczne jest jednak zrozumienie tej stabilności na podstawie globalnych właściwości wnętrza układu. To właśnie tu w tej opowieści pojawia się wzór TKNN znaleziony przez Thoulessa i jego współpracowników (Thouless i inni, 1982). Inspiracją dla Thoulessa było słynne widmo zwane motylem Hofstadtera

(Hofstadter, 1976) pokazane na ryc. 2. Widmo takie powstaje, gdy na dwuwymiarowej powierzchni, przez którą przechodzi pole magnetyczne, występuje periodyczny potencjał. W takiej sytuacji, jeśli strumień pola magnetycznego przechodzącego przez jednostkową komórkę periodycznego potencjału jest liczbą wymierną postaci p/q (p i q są tu względnie pierwszymi liczbami całkowitymi, niemającymi wspólnych dzielników), problem struktury pasm energii można ściśle rozwiązać. Rozwiązanie zależy w bardzo delikatny sposób od wartości liczb p i q ; aby je otrzymać trzeba rozpatrywać powiększoną, tzw. magnetyczną komórkę jednostkową, tj. taką, by przechodzący przez nią strumień pola magnetycznego był całkowitą wielokrotnością londonowskiego kwantu Φ_0 . Wpływ pola magnetycznego polega na tym, że każde pasmo istniejące przy braku pola, w jego obecności rozszczepia się na q podpasm. Zatem gdy strumień pola przechodzący przez jednostkową komórkę zmienia wartość od $1/3$ do $100/301$, to co przy $1/3$ było jednym podpasmem rozdziela się na 100 znacznie węższych podpasm, choć strumień pola magnetycznego zmienił się tylko nieznacznie!

Już wcześniej, dzięki jasnemu argumentowi podanemu przez Roberta Laughlina (Laughlin, 1981), było oczywiste, że jeśli przy braku wzajemnego oddziaływania elektronów energia Fermiego leży wewnątrz przerwy energetycznej w ich widmie, hallowska przewodność σ^{xy} musi, w granicy niskich temperatur, $T \rightarrow 0$, być całkowitą wielokrotnością $e/\Phi_0 = e^2/2\pi\hbar$. W dolnym lewym rogu motyla Hofstadtera, odpowiadającemu sytuacji, w której strumień pola magnetycznego przechodzącego przez komórkę jednostkową jest bardzo mały, widmo energii elektronów jest bardzo podobne do widma energii prostych poziomów Landaua, tj. składa się z bardzo wąskich pasm (odpowiadających tylko nieznacznie poszerzonym poziomom Landaua) poprzedzielanych szerokimi przerwami. W tej sytuacji liczba całkowita n jest po prostu równa liczbie zapełnionych poziomów Landaua. Jednak gdy strumień pola magnetycznego zwiększa się, poziomy Landaua rozszczepiają się na mający skomplikowaną strukturę układ podpasm rozdzielonych dużą liczbą przerw, które powstają i znikają, w miarę jak zmienia się pole magnetyczne. Pytanie jakie postawili TKNN brzmiało: czym jest definiująca niskotemperaturową przewodność hallowską liczba całkowita n , gdy poziom Fermiego znajduje się wewnątrz jednej z takich nowopowstałych przerw?

Chociaż TKNN rozpatrywali magnetyczną (tj. powiększoną) komórkę jednostkową, stosowało się do niej twierdzenie Blocha, zgodnie z którym elektronowe funkcje falowe muszą być postaci

$$\Psi_{\mathbf{k}n}(\mathbf{r}) = u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

4. Redakcja PF przeprasza za nie najlepszą czytelność niektórych elementów rycin w tym artykule — takiej jakości ilustracje zawiera oryginalny wykład udostępniony przez Nobel Foundation.

w której $u_n(\mathbf{k}, \mathbf{r})$ jest periodyczną funkcją położenia \mathbf{r} zdefiniowaną w obrębie magnetycznej komórki jednostkowej (MUC), a \mathbf{k} jest wektorem Blocha definiującym magnetyczną strefę Brillouina (BZ), która w dwóch wymiarach jest topologicznie równoważna torusowi (który z kolei jest równoważny pączkowi z dziurą). Wykorzystując fundamentalny wzór Kubo na przewodność elektryczną TKNN otrzymali następujący wzór

$$\sigma^{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\text{BZ}} d^2\mathbf{k} F_n^{xy}(\mathbf{k}) \right],$$

$$F_n^{xy}(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i} \int_{\text{MUC}} d^2\mathbf{r} \left(\frac{\partial u_n^*}{\partial k_x} \frac{\partial u_n}{\partial k_y} - \frac{\partial u_n^*}{\partial k_y} \frac{\partial u_n}{\partial k_x} \right).$$

Wskaźnik n numeruje tu zajęte elektronami pasma energii leżące poniżej poziomu Fermiego. Istotną właściwością [tego wzoru] jest to, że całka po magnetycznej strefie Brillouina z każdej z periodycznych funkcji $F_n^{xy}(\mathbf{k})$ jest równa 2π razy liczba całkowita, co zgadza się z wynikiem Laughlina. TKNN zdali sobie sprawę z tego, że tak musi być, gdyż funkcje $F_n^{xy}(\mathbf{k})$ można zapisać w postaci

$$F_n^{xy}(\mathbf{k}) = \frac{\partial}{\partial k_x} \mathbf{A}_n^y(\mathbf{k}) - \frac{\partial}{\partial k_y} \mathbf{A}_n^x(\mathbf{k}),$$

$$\mathbf{A}_n^i(\mathbf{k}) = \frac{1}{2i} \int_{\text{MUC}} d^2\mathbf{r} \left(u_n^* \frac{\partial u_n}{\partial k_i} - u_n \frac{\partial u_n^*}{\partial k_i} \right),$$

co prowadzi do kluczowego wzoru wyrażającego przewodność hallowską w postaci całki po brzegu strefy Brillouina (BZB)

$$\sigma^{xy} = \frac{e^2}{2\pi\hbar} \sum_n \frac{1}{2\pi} \oint_{\text{BZB}} dk_i \mathbf{A}_n^i(\mathbf{k}).$$

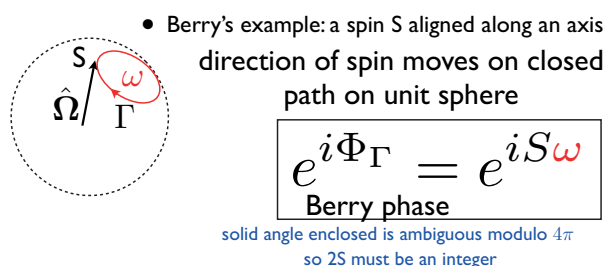
Od Marcela den Nijsa i Petera Nightingale dowiedziałem się, że włączenie do ich pracy (w postaci tylko jednego akapitu) tego ważnego jawnego ogólnego wzoru (zamiast wzorów dotyczących szczególnego modelu Hofstadtera, które były głównym przedmiotem ich pracy) było, jak sobie przypominają, efektem końcowego namysłu, już w trakcie spisywania pracy! Marcel den Nijs twierdził, że przejawem „geniuszu Davida Thulessa było wybranie zamiast jakiegoś przypadkowego potencjału (w celu otrzymania poszerzonych poziomów Landaua) uogólnienia w formie potencjału periodycznego; to był krok zasadniczy”. Pokazuje to siłę tkwiącą w wybraniu właściwego modelu, na którym można wykonać analitycznie kompletne obliczenia. Choć i przedtem interesowano się otrzymaniem jakiejś fizycznej realizacji modelu Hofstadtera, nie miał on żadnych związków z rzeczywistymi próbkami, w których obserwowany był całkowity kwantowy efekt Halla, którego modelem właściwym fizycznie i naturalnie narzucającym

się do badania wydawał się zasadniczo nierozwiązywalny model z przypadkowym potencjałem.

Niedługo po ukazaniu się pracy TKNN, Michael Berry odkrył (Berry, 1984) słynną, nazwaną jego imieniem, fazę geometryczną charakteryzującą ewolucję układów kwantowych przy powolnych (adiabatywnych) zmianach warunków zewnętrznych, jakim są one poddane. Klasycznym przykładem podanym przez Berry'ego jest spin S ustawiony wzdłuż pola magnetycznego, którego kierunek reprezentuje jednostkowy wektor $\hat{\Omega}$; kierunek ten z wolna zmienia się powracając po pewnym czasie do wyjściowego. Tym samym wektor $\hat{\Omega}$ zakreśla na jednostkowej sferze pewną zamkniętą drogę. [Tak zwane twierdzenie adiabatyczne mówi, że w granicy nieskończonego powolnej zmiany kierunku pola spin powraca do swojego wyjściowego stanu kwantowego, ale wektor reprezentujący stan końcowy różni się od wyjściowego o czynnik fazowy]. Odkrycie Berry'ego polegało na tym, że [ta] związana ze zmianą kierunku $\hat{\Omega}$ pola faza składa się nie tylko z oczekiwanej części proporcjonalnej do energii [spinu w polu magnetycznym], ale także z części *geometrycznej*, która zależy tylko od kształtu drogi i jest w tym przypadku równa kątowemu bryłowemu ω wyznaczonemu przez drogę wytyczoną na sferze (czyli polu powierzchni na sferze jednostkowej otoczonej zakreśloną na niej zamkniętą drogą) pomnożonemu przez wartość S spinu. Patrząc na to bardziej wnikliwie można zauważyć, że powierzchnia ograniczona wytyczoną na sferze zamkniętą drogą nie jest określona w sposób jednoznaczny i skutek tego kąt bryłowy ω jest przez nią wyznaczany tylko modulo 4π . Jednak znaczenie fizyczne ma tylko czynnik fazowy $\exp(iS\omega)$, a on jest jednoznaczny, bo $2S$ jest zawsze liczbą całkowitą. Wpływ odkrytej przez Berry'ego fazy geometrycznej na rozwój współczesnych zastosowań mechaniki kwantowej trudno przecenić; wielu badaczy jest zdania, że zasługuje ona na pełniejsze zaprezentowanie w przyszłych wykładach noblowskich.

Zarówno praca Berry'ego, jak i wzór TKNN przyciągnęły uwagę fizyka matematycznego Barry'ego Simona, który zauważył (Simon, 1983), że istnieje między nimi związek: fazę Berry'ego można bowiem uważać albo za całkę z *koneksji Berry'ego* (analog znanego z elektrodynamiki potencjału wektorowego) wzdłuż [zamkniętej] krzywej (drogi), albo, wykorzystując twierdzenie Stokesa, za całkę ze *strumienia Berry'ego* lub z *krzywizny Berry'ego* po powierzchni ograniczonej tą krzywą. Co więcej, jeśli powierzchnia nie posiada brzegu, czyli jest powierzchnią zamkniętą, całkowita [(tj. scałkowana po tej powierzchni)] krzywizna Berry'ego musi być równa całkowitej wielokrotności 2π i ta wielokrotność jest niezmiennikiem topologicznym, zwanym (mówiąc bardziej technicznie) pierwszą klasą Cherna

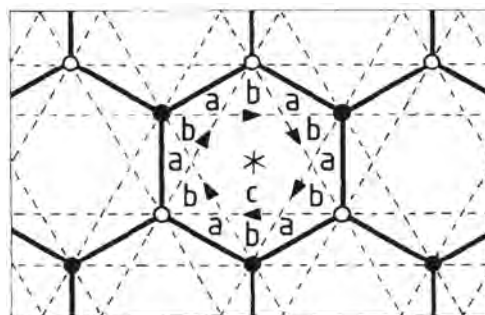
wiązki włóknistej o grupie strukturalnej $U(1)$ (będącej matematyczną charakteryzacją kwantowomechanicznej funkcji falowej) nad dwuwymiarową rozmaitością. Twierdzenie to jest bliskim analogiem twierdzenia Gaussa-Bonneta dotyczącego całki po dwuwymiarowej powierzchni z jej wewnętrznej krzywizny (krzywizny Gaussa). Jeśli powierzchnia taka jest zamknięta, tak jak powierzchnia sfery lub pączka, to topologiczny niezmiennik Gaussa-Bonneta jest równy liczbie dziur (*genusowi* powierzchni); to właśnie ta matematyczna analogia dała początek powszechnemu sposobowi ilustrowania, za pomocą filmu, topologicznej równoważności filizance bajgla lub pączka.



Ryc. 3. Faza Berry'ego związana z adiabaticzną ewolucją kwantowego wektora stanu spinu ustawiającego się wzdłuż zmieniającego się kierunku pola magnetycznego. Faza Φ_Γ jest równa spinowej liczbie kwantowej S pomnożonej przez kąt bryłowy wyznaczony przez zamkniętą drogę Γ zakreślaną na sferze przez wektor $\hat{\Omega}$ zadający kierunek pola. Gdy wektor ten powraca do swego pierwotnego kierunku, końcowy [wektor] stan[ui] spinu jest taki sam, jaki był na początku, tylko jest pomnożony przez czynnik $\exp(i\Phi_\Gamma)$, który zależy w sposób geometryczny od zakreślonej drogi. Ponieważ kąt bryłowy jest przez zakreśloną przez wektor $\hat{\Omega}$ drogę wyznaczony tylko modulo 4π , topologia wymaga, by podwojony spin, $2S$, był (tak jak to zawsze jest w mechanice kwantowej) liczbą całkowitą

Rozpoznanie we wzorze TKNN topologicznego niezmiennika stało się początkiem uświadamiania sobie, że oprócz roli jaką poprzez zidentyfikowanie wzbudzeń topologicznych topologia odegrała w klasycznej fizyce przemiany fazowej Bierzieskiego–Kosterlitz–Thoulessa będzie ona także odgrywać ważną rolę w klasyfikowaniu samych stanów kwantowych. Dany wzorem TKNN niezmiennik (*liczba Cherna* lub *pierwsza klasa Cherna*, równa $\frac{1}{2}\pi$ razy całka z krzywizny Berry'ego po dwuwymiarowej rozmaitości) miał jednak pozostać jedynym znanym fizykom materii skondensowanej aż do odkrycia w roku 2004 przez Kane'a i Mele (Kane i Mele, 2005), nowego niezmiennika \mathbb{Z}_2 odgrywającego rolę w fizyce topologicznych izolatorów. Dopiero to odkrycie doprowadziło do eksplozji nowych eksperymentalnych i teoretycznych odkryć dotyczących topologicznych stanów materii.

Wynik TKNN dotyczył struktury pasmowej widma układu elektronów umieszczonego w jednorodnym polu magnetycznym. W obecności potencjału periodycznego poziomy Landaua ulegają rozszczepieniu na pasma Blocha. W roku 1988, analizując zapropono-



Ryc. 4. Prosty grafenopodobny zabawkowy model o ciasnych wiązkach (Haldane, 1988) będący realizacją *topologicznego izolatora ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu* lub izolatora Cherna wykazującego *anomalny kwantowy efekt Halla* przy zerowym zewnętrznym polu magnetycznym. Elektrony mogą wykonywać przeskoki wzdłuż (zaznaczonych ciągłymi liniami) wiązań najbliższych sąsiadów — przeskokom tym odpowiadają rzeczywiste elementy macierzy [(amplitudy)] — oraz wzdłuż (zaznaczonych liniami przerywanymi) wiązań łączących drugich pod względem wzajemnego oddalenia sąsiadów — takim przeskokom w kierunkach wskazanych strzałkami odpowiada zespolona amplituda o dodatniej fazie. (Dwie kopie takiego modelu — jedna odpowiadająca elektronom o spinie do góry i druga odpowiadająca elektronom o spinie w dół — zostały później połączone przez Kane'a i Mele, aby modelować topologiczny izolator nie łamiący symetrii względem odwrócenia czasu.) [W moim modelu] złamanie tej symetrii wprowadzają niezerowe fazy zespolonych amplitud odpowiadających przeskokom między drugimi co do oddalenia sąsiadami; fazy te mogą być skutkiem występowania w centrum każdej z heksagonalnych komórek ferromagnetycznie uporządkowanych dipoli magnetycznych (zaznaczonych symbolem $*$) skierowanych prostopadle do dwuwymiarowej płaszczyzny. Dipole takie wytwarzają lokalnie strumień pola magnetycznego, który choć scałkowany po całej komórce jest zerowy (dzięki czemu standardowa struktura Blocha pozostaje nienaruszona), ma jednak różne wartości w obszarach zaznaczonych na rysunku literami a , b i c

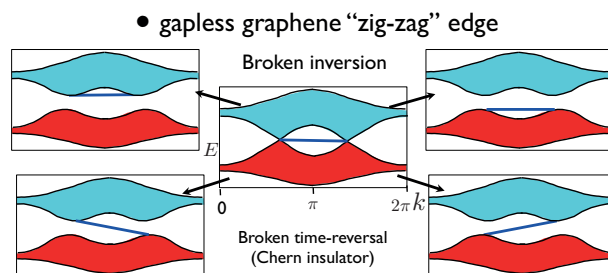
waną przez Fradkina, Dagotto i Boyanovskiego (Fradkin i inni, 1986) realizację *anomalii parzystości* zdałem sobie sprawę z tego, że koniecznym warunkiem wystąpienia efektu Halla nie jest obecność pola magnetycznego, lecz po prostu złamanie symetrii względem odwrócenia czasu. Wniosek ten właściwie powinien być zostać odczytany z samego wyniku TKNN, ale najwyraźniej nie został wcześniej dostrzeżony. Zaproponowałem więc (Haldane, 1988) bardzo prosty układ pokazany na ryc. 4, wzorowany na dwuwymiarowej pojeźdycznej warstwie grafitu (w owym czasie był to czysto zabawkowy model — możliwość, że kiedyś powstanie grafen wydawała się wtedy czystym *science fiction*). Nazwałem go modelem kwantowego efektu Halla bez poziomów Landaua. Jego konstrukcja zamiast zależnych od pola magnetycznego egzotycznych stanów występujących w modelu Hofstadtera wykorzystywała standardowe stany Blocha. Konstrukcję tę nazywa się obecnie modelem *anomalnego kwantowego efektu Halla* albo *izolatorem Cherna*.

Skonstruowany przeze mnie układ można też nazwać pierwszym topologicznym izolatorem, z tym że izolatorem ze złamaną symetrią względem odwrócenia czasu. Okazuje się bowiem, że w dwuwymiarowym grafenie będące wierzchołkami stref Brillouina *punkty Diraca*, w których pasmo przewodnictwa i pasmo walen-

cyjne stykają się ze sobą, są stabilne tylko wtedy, gdy zarówno symetria względem odwrócenia czasu, jak i symetria względem przestrzennego odbicia pozostają nienaruszone: krzywizna Berry'ego jest wtedy tożsamościowo równa zero, a czynniki fazowe Berry'ego odpowiadające zamkniętym drogom w strefie Brillouina są [czysto] topologiczne i mają wartości $\exp(i\varphi) = \pm 1$, zależnie od tego, czy liczba owinięć drogi wokół punktów Diraca jest parzysta, czy nieparzysta. Badany wcześniej przez Semenoffa (Semenoff, 1984) oddzielony przerwą od reszty widma energetycznego nietopologiczny stan izolatorowy powstaje, gdy złamana jest *symetria względem odbicia przestrzennego*. Natomiast w zabawkowym modelu, który ja badałem, przerwa w punktach Diraca tworzy się dzięki złamaniu symetrii względem odwrócenia czasu; jej złamanie wskutek przyjęcia, że amplitudy przeskoków do drugich (co do bliskości) węzłów tej samej podsięci, są zespolone (mają niezerowe tzw. chiralne fazy) powoduje powstanie kwantowego stanu hallowskiego. Gdy tylko utworzy się przerwa zrywająca we wnętrzu układu połączenie pasma przewodnictwa i pasma walencyjnego, pasma te zaczynają mieć przeciwne liczby Cherna ± 1 ; istnieją też jednokierunkowe stany brzegowe. Najlepiej jest to widoczne na „zygzakowatym” brzegu: ponieważ elektrony nie mają tam możliwości przeskakiwania do drugich co do oddalenia węzłów, stan brzegowy o zerowej energii zajmuje jedną trzecią powierzchni strefy Brillouina, łącząc punkty Diraca w sposób przypominający ten, w jaki stany powierzchniowe zwane *łukami Fermiego*, łączą punkty Diraca trójwymiarowego półmetal Weyla odkrytego ostatnio przez Ashvina Vishwanatha wraz ze współpracownikami (Wan i inni, 2011). Kiedy otwiera się przerwa, albo z powodu złamania symetrii względem odbić, albo symetrii względem odwrócenia czasu, albo obu tych symetrii na raz, stany brzegowe w każdym mającym teraz przerwę punkcie Diraca (tzw. masywnym punkcie Diraca) muszą przyłączyć się albo do pasma walencyjnego, albo do pasma przewodnictwa, co prowadzi do czterech możliwości pokazanych na ryc. 5.

Ten prosty, zabawkowy model okazał się bardzo użyteczny: choć w wersji oryginalnej był modelem nładowanych fermionów, dość nieoczekiwanie został przeobrażony na model neutralnych bozonów i fotonowego kryształu (Haldane i Raghunathan, 2008) pokazując, jak w takich układach mogą także powstawać *jednokierunkowe* stany brzegowe. Wynik ten zapoczątkował powstanie dziedziny zwanej fotoniką topologiczną. Stany takie udało się wytworzyć eksperymentalnie w ramach fotoniki mikrofalowej.

Możliwość istnienia niezmienniczego względem odwrócenia czasu analogu efektu Halla (*spinowego efektu Halla*) była w roku 2004 wciąż przedmiotem dyskusji.



Ryc. 5. Zygzakowaty brzeg grafenu po uwzględnieniu zaburzających członów łamiących symetrię względem odbicia przestrzennego lub symetrię względem odwrócenia czasu. Przy braku zaburzenia istnieje stan brzegowy łączący dwa sąsiednie punkty Diraca, w których wypełnione pasmo walencyjne (zaznaczone na czerwono) styka się z niezapełnionym pasmem przewodnictwa (zaznaczonym na zielono). Gdy wprowadzenie zaburzenia spowoduje powstanie przerwy, stan brzegowy może łączyć się z pasmami na cztery różne sposoby. Dwa z nich — połączenie pasm walencyjnego i przewodnictwa — są topologiczne

Pierwszy model spinowego efektu Halla podali dopiero Charles Kane i Eugen Mele (Kane i Mele, 2005). Połączyli oni dwie kopie mojego modelu: jedna kopia reprezentowała elektrony o spinie do góry, których pasmo walencyjne charakteryzowało się liczbą Cherna równą ± 1 , a druga elektrony o spinie w dół, których pasmo walencyjne miało liczbę Cherna przeciwną, tj. równą ∓ 1 . Mody brzegowe elektronów o spinie do góry i o spinie w dół propagowały się w przeciwnych kierunkach. Ponieważ sumaryczna liczba Cherna pasm walencyjnych elektronów o obu kierunkach spinu była równa zero, żaden kwantowy efekt Halla nie występował. Naiwnie można było sądzić, że nic nie zabrania, by nieoddzielone od reszty widma przerwy mody brzegowe rozpraszają się do tyłu i mieszały [z modami we wnętrzu układu], co, po uwzględnieniu sprzężenia spin-orbita typu Rashby'ego, powinno prowadzić do powstania przerwy. Za pomocą obliczeń numerycznych Kane i Mele odkryli jednak, że jeśli tylko niezmienniczość względem odwrócenia czasu nie była złamana, mody brzegowe w istocie nie mieszały się z powodu istnienia wcześniej nieoczekiwanego niezmiennika topologicznego \mathbb{Z}_2 , związanego z degeneracją Kramersa. Ten nowy niezmiennik ma swoje trójwymiarowe uogólnienie, które w tym samym czasie i niezależnie odkryli Joel Moore i Leon Balents (Moore i Balents, 2007), Rahul Roy (Roy, 2009) oraz Liang Fu i Kane i Mele (Fu i inni, 2007). Doprowadziło to do eksperymentalnego odkrycia trójwymiarowych niezmienniczych względem odwrócenia czasu topologicznych izolatorów i, wreszcie, do ogłoszonego przez grupę QiKun Xue z uniwersytetu Tsinghua w Pekinie (Chang i inni, 2013) eksperymentalnego zrealizowania anomalnego kwantowego efektu Halla w cienkich błonach z niezmienniczych względem odwrócenia czasu topologicznych izolatorów domieszkowanych materiałem magnetycznym.

Przejdę teraz do innego (dokonanego w 1981 r.) uhoonorowanego tą nagrodą Nobla odkrycia: do nowych stanów typu ciecz spinowa jednowymiarowych antyferromagnetyków zbudowanych z kwantowych spinów całkowitych. Stany takie (w przypadku układów spinów S równych $1, 3, \dots$) zostały ostatnio przez Xiao-Gang Wena i współpracowników (Chen i inni, 2013) zaliczone do klasy *stanów topologicznych chronionych przez symetrię*; w tym przypadku symetrią tą jest niezmienniczość względem odwrócenia czasu i względem odbicia przestrzennego.

Standardowe stany podstawowe jednowymiarowego magnetyka, powszechnie rozpatrywane przed rokiem 1981, były typowo stanami nie wykazującymi splątania. Charakteryzowały się zwykle długozasięgowym uporządkowaniem magnetycznym i można je było modelować jako iloczyn prosty niezależnych stanów spinów S [(całkowitych lub połówkowych)] ulokowanych w kolejnych węzłach. Przykładami takich niesplątanych stanów iloczynowych są np. stan ferromagnetyczny ($\dots \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots$) albo antyferromagnetyk Néela ($\dots \uparrow\downarrow\uparrow\downarrow \dots$). W pokazanych tu konfiguracjach sąsiednie spiny są ustawione albo równoległe albo antyrównoległe w stosunku do osi z , ale w przypadku (izotropowego) magnetyka Heisenberga stany takie łamią spontanicznie symetrię względem obrotów, bo oś, w stosunku do której są one ustawione albo równoległe, albo antyrównoległe, wyróżnia jeden kierunek (może on być, oczywiście, wybrany dowolnie). W przypadku ferromagnetyka Heisenberga kierunek uporządkowania jest [zarazem] kierunkiem makroskopowego wektora momentu pędu i zachowanie momentu pędu, [obowiązujące w układach, których hamiltonian jest] niezmienniczy względem obrotów, uniemożliwia zmiany ferromagnetycznego „parametru porządku” (czyli kierunku, wzdłuż którego ustawione są spiny) przez fluktuacje.

W przypadku antyferromagnetyka nie ma jednak zasady zachowania, która by chroniła strukturę stanu podstawowego przed skutkami fluktuacji. Słynne twierdzenie Mermin–Wagnera, które w przypadku zachodzącej przy niezerowej temperaturze przemiany fazowej Kosterlitz–Thoulessa było przyczyną paradoksu, ma, w przypadku jednowymiarowych układów kwantowych, podobne konsekwencje: stan podstawowy jednowymiarowego układu kwantowego, którego hamiltonian jest niezmienniczy względem symetrii ciągłej, nie może, bez istnienia zabezpieczających go praw zachowania, wykazywać długozasięgowego uporządkowania charakteryzującego się łamiącą tę symetrię niezerową wartością parametru porządku. W wyższych wymiarach układ spinów Heisenberga może mieć łamiący symetrię ferromagnetyczny stan podstawowy i nieodzielone odeń w widmie energetycznym przerwy wzbudzenia

Goldstonowskie znane jako (antyferromagnetyczne) fale spinowe, które są małymi harmonicznymi fluktuacjami parametru porządku wokół jego jednorodnej w stanie podstawowym konfiguracji. Jednak w przypadku jednowymiarowego antyferromagnetyka o spinie S , gdyby nawet przyjąć założenie, że wystąpiło długozasięgowe antyferromagnetyczne uporządkowanie typu Néela stanu podstawowego, to, jak łatwo stwierdzić, skutkiem harmonicznymi fluktuacji występujących w stanie podstawowym byłoby zniszczenie takiego założonego długozasięgowego uporządkowania.

W tym miejscu do opowieści tej wkracza, okazuje swoją moc i wprowadza zamieszanie ścisły (ale nie w pełni zrozumiany) matematyczny wynik! W roku 1931 Hans Bethe (który później miał zostać opiekunem pracy doktorskiej Davida Thoulessa na uniwersytecie Cornell), zanim jeszcze odkrył, jak reakcje jądrowe zasilały Słońce, pracował m.in. nad jednowymiarowym łańcuchem Heisenberga traktowanym jak zabawkowy model magnetyzmu. Wymyślił wtedy (Bethe, 1931) ważny *Ansatz* noszący dziś jego imię (tzw. *Ansatz* Bethego), który dawał ściśle rozwiązanie problemu stanów własnych modelu jednowymiarowego układu spinów $S = \frac{1}{2}$ oddziałujących każdy tylko ze swoimi najbliższymi sąsiadami i umożliwiał otrzymanie w jawnej postaci widma wartości własnych takiego układu. Zrozumienie stojącej za tym wynikiem struktury matematycznej zajęło jednak niestety ponad sześć dziesięcioleci i w latach siedemdziesiątych XX w. z tego ścisłego rozwiązania wciąż udawało się znajdować jedynie poziomy energetyczne układu i jego właściwości termodynamiczne, ale nie funkcje korelacji. Otrzymywane za pomocą *Ansatzu* Bethego widmo energii najniższych wzbudzeń układu spinów pozornie przypominało przewidywania teorii fal spinowych z tym wszakże, że przewidywana w ten sposób prędkość [rozchodzenia się] fal o dużej długości różniła się od ich prędkości przewidywanej przez teorię fal spinowych o czynnik $\pi/2$.

Choć szczegóły *Ansatzu* Bethego były dość niejasne i wymagały pewnego wtajemniczenia, powszechnie uznawano, iż jest on dowodem na to, że obraz fal spinowych jest mniej więcej poprawny, mimo znanego faktu niszczenia długozasięgowego uporządkowania przez efekty kwantowe. Dziś wiemy, że elementarne wzbudzenia występujące w modelu, który rozwiązał Bethe, nie mają w istocie *żadnego związku z falami spinowymi* — są one powstającymi parami topologicznymi wzbudzeniami układu spinów $\frac{1}{2}$ (Fadiejew i Tachtdżan, 1981), które teraz nazywa się *spinonami*. Nawet jednak w latach siedemdziesiątych powinno być się zauważyć, że ciepło właściwe wyrażone przez prędkość rozchodzenia się wzbudzeń o dużej długości fali przewidywane przez teorię fal spinowych jest dokładnie dwu-

krotnie większe niż przewidywane przez ścisły Ansatz Bethego, co oznacza, że nie ma żadnego związku między teorią fal spinowych i niskoenergetycznymi wzbudzeniami rozwiązywalnego modelu Bethego.

W początku lat siedemdziesiątych z prac Alana Luthera i Ingo Peschela wyłoniła się nowa technika pozwalająca obejść od dawna nierozwiązywalny problem otrzymania funkcji korelacji z rozwiązania Bethego. Znow ważna okazała się pewna stara (jeszcze starsza niż ta Bethego!) praca: Luther i Peschel wykorzystali mianowicie transformację Jordana-Wignera (Jordan i Wigner, 1928) odwzorowującą jednowymiarowy magnetyk, czyli łańcuch spinów $S = \frac{1}{2}$ z oddziaływaniem najbliższych sąsiadów, na model bezspinowych fermionów przemieszczających się w jednym wymiarze dzięki przeskokom między najbliższymi węzłami sieci, powodowanym przez wzajemne oddziaływanie cząstek znajdujących się w sąsiednich węzłach. Jeśli wymienne oddziaływanie Heisenberga mające postać sprzężenia $J \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n+1}$ uogólni się do postaci $J^x S_n^x S_{n+1}^x + J^y S_n^y S_{n+1}^y + J^z S_n^z S_{n+1}^z$ i przyjmie $J^z = 0$ oraz $J^x = J^y = J^{xy}$, wówczas kwantowy model XX oddziaływania spinów $S = \frac{1}{2}$ zostaje odwzorowany na model nieoddziałujących wzajemnie, czyli swobodnych fermionów, który może być do końca jawnie rozwiązany, a jego właściwości fizyczne [(w tym funkcje korelacji)] zbadane.

Wcześniej, bo już w połowie lat sześćdziesiątych, Joaquin Luttinger (Luttinger, 1963) zauważył, że „zabawkowy” model oddziałujących bezspinowych fermionów o liniowym, typu dirakowskiego, związku dyspersyjnym i oddziaływaniu ograniczonym do rozpraszania do przodu z małym przekazem pędu, powinien być ściśle rozwiązywalny przy wykorzystaniu *bozonów Tomonagi* wprowadzonych przez Sin-itiro Tomonagę (Tomonaga, 1950). Gdy występujące początkowo problemy z rozwiązaniem Luttingera zostały wyjaśnione przez Daniela Mattisa i Elliota Lieba (Mattis i Lieb, 1965), wyrosła z tego ważna technika „bozonizacji” (pozwalająca reprezentować jednowymiarowe układy fermionów w języku modów oscylatora harmonicznego Tomonagi), która została jawnie sformułowana przez Schotte’go i Schotte’go (Schotte i Schotte, 1969) w ich pracy z 1969 roku poświęconej uproszczonemu traktowaniu problemu *osobliwości brzegowych promieni X*.

W roku 1975 Luther i Peschel (Luther i Peschel, 1975) zaadaptowali tę nową technikę bozonizacji do modelu antyferromagnetyka o niezerowym sprzężeniu $J^z = \lambda |J^{xy}|$ z $\lambda < 1$, tj. antyferromagnetyka mającego tzw. łatwą płaszczyznę. Odwzorowali ten model na pewną efektywną kwantową teorię pola w dwóch (1 + 1) wymiarach, którą z kolei można badać odwzorowując ją metodą bozonizacji na problem oscylatora harmonicznego. Znalezione w wyniku zastosowania takiego podej-

ścia (i po dokonaniu tzw. obrotu Wicka pozwalającego zamiast teorii pola w 1 + 1-wymiarowej przestrzeni Minkowskiego rozpatrywać tę samą teorię pola w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej), [stan podstawowy układu] był całkowicie równoważny niskotemperaturowej *uporządkowanej topologicznie* fazie klasycznego, badanego w tym samym czasie przez Kosterlitz i Thoulessa, dwuwymiarowego modelu XX o funkcjach korelacji typu Néela, zanikających według obowiązującego przy dużych wartościach różnicy $|n - n'|$ prawa potęgowego

$$\begin{aligned} \langle S_n^x S_{n'}^x \rangle &= \langle S_n^y S_{n'}^y \rangle \sim (-1)^{n-n'} |n - n'|^{-\eta}, \\ \langle S_n^z S_{n'}^z \rangle &\sim (-1)^{n-n'} |n - n'|^{-1/\eta}, \end{aligned}$$

z nieuniwersalnym, bo zależącym od wartości stałej sprzężenia λ , wykładnikiem η . Przyjęcie następnie całkowitej nieizotropowości, tj. $J^x \neq J^y$, odwzorowuje ten model (model XY) na teorię pewnego masywnego pola (na tzw. *model sinus-Gordona*), którego wzbudzenia oddziela od stanu podstawowego przerwa energetyczna o szerokości zależnej od różnicy $J^x - J^y$ potęgowo, przy czym wykładnik potęgi jest wyznaczony przez parametr η .

W owym czasie ściśle rozwiązanie Bethego izotropowego (o $J^x = J^y = J^z$) modelu XXX Heisenberga oddziałujących spinów $S = \frac{1}{2}$ zostało już przez Rodneya Baxtera uogólnione na w pełni nieizotropowy model XYZ, co stało się możliwe dzięki zidentyfikowaniu algebry Baxtera–Yanga jako kluczowego elementu, który sprawia, że korzystając z Ansatzu Bethego daje się otrzymać rozwiązanie także i tego modelu. Luther i Peschel mogli więc wykorzystać tę informację, by w sposób okrężny otrzymać w funkcji parametru λ wartość wykładnika η charakteryzującego funkcje korelacji modelu XXZ mającego łatwą płaszczyznę (tj. o $|\lambda| < 1$). Ustalili oni, że gdy sprzężenie J^z jest dodatnie (co odpowiada antyferromagnetykowi) wykładnik η rośnie od wartości $\frac{1}{2}$, jaką ma w punkcie $\lambda = 0$ (tj. gdy $J^z = 0$), odpowiadającym w pełni rozwiązywalnemu modelowi XX nieoddziałujących fermionów, osiągając wartość $\eta = \eta^{-1} = 1$ przy $\lambda = 1$, co odpowiada heisenbergowskiemu modelowi XXX antyferromagnetyka. Natomiast przy ujemnym sprzężeniu J^z (odpowiadającym ferromagnetykowi) wykładnik η maleje osiągając wartość zero przy $\lambda = -1$, kiedy to stan podstawowy układu staje się dalekozasięgowo uporządkowany, a parametr porządku staje się wielkością zachowaną. Teoriopolowe podejście Luthera–Peschela nie było jednak w stanie objaśnić pojawiania się przy $\lambda > 1$ przerwy energetycznej, kiedy to model nie odpowiada już antyferromagnetykowi mającemu łatwą płaszczyznę, lecz antyferromagnetykowi o łatwej osi.

W roku 1979 pracowałem nad dokładnym sformułowaniem metody bozonizacji i ustaliłem (Haldane,

1981b), że mody o zerowym pędzie gęstości fermionów powinny być reprezentowane przez zmienne typu działanie-kąta, a nie przez mody oscylatora harmonicznego Tomonagi, które reprezentują mody mające niezerowy pęd. Owe stopnie swobody działanie-kąta mają naturę topologiczną, co rozwiązało zagadkę, w jaki sposób w jednym wymiarze fermiony mogą być reprezentowane przez bozony (mody oscylatora harmonicznego): konstrukcja tej reprezentacji wykorzystuje w istocie oscylatory harmoniczne oraz stopnie swobody odpowiadające topologicznej liczbie nawinięć. Oznacza to, że na widmo wzbudzeń modelu bezspinowych fermionów spełniających periodyczne warunki brzegowe składają się dwa rodzaje wzbudzeń topologicznych (charakteryzowanych dwiema oddzielnymi liczbami nawinięć: propagujących się w prawo i propagujących się w lewo pół fermionowych) oraz mody fal dźwiękowych Tomonagi.

Znajomość energii dwóch topologicznych wzbudzeń pozwoliła wyznaczyć nie tylko wartość prędkości dźwięku, którą można było sprawdzić innym, niezależnym sposobem, ale także wykładnik η charakteryzujący funkcje korelacji. Stosując te wyniki do wykorzystującego Ansatz Bethego rozwiązania modelu XXZ z zerowym zewnętrznym polem magnetycznym (lub równoważnego mu poprzez transformację Jordana–Wignera modelu połowicznie zapełnionego pasma fermionów), mogłem się przekonać, że nowe wzory wyrażające wykładnik η przez energie wzbudzeń topologicznych i ich liczby nawinięć zgadzają się w tym przypadku ze znaną w sposób okrężny przez Luthera i Peschela dokładną zależnością tego wykładnika od sprzężeń i są, wobec tego, poprawne i całkowicie ogólne.

Wynik ten stworzył możliwość otrzymania z rozwiązania wykorzystującego Ansatz Bethego ścisłych wykładników charakteryzujących funkcje korelacji pewnych jednowymiarowych układów wykazujących krytyczne zachowanie poprzez dopasowanie energii różnych ich topologicznych wzbudzeń do tego, co nazywałem (Haldane, 1981b) efektywną *cieczą Luttingera* (albo, może bardziej właściwie, *cieczą Tomonagi–Luttingera*) reprezentowaną przez model Luttingera. Wyniki te otrzymano jeszcze przed pojawieniem się silniejszych metod, wykorzystujących konforemną teorię pola w dwóch (1 + 1) wymiarach, w ramach których *ciecze Luttingera* okazują się układami, które wobec braku ograniczeń nakładanych przez niezmienniczość lorentzowską dają się rozłożyć na abelowe reprezentacje algebry Virasoro.

Gdy rozpatrzyłem z tego nowego punktu widzenie pełną przestrzeń parametrów wykorzystujących Ansatz Bethego rozwiązań łańcucha spinów XXZ (co w przypadku pasm fermionowych o zapełnieniu odbiegającym od połowicznego wymagało numerycznego rozwią-

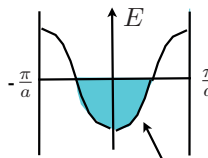
zowania równania całkowego, do którego prowadzi Ansatz Bethego), rzut oka na wyniki natychmiast ujawnił, że elementem, którego brakowało w pracy Luthera i Peschela, był proces typu *umklapp* (zagięcia w j. niem), dzięki któremu przy połowicznym zapełnieniu pasma pęd układu zmienia się w wyniku rozpraszania o $4k_F$ (czyli o wektor Bragga); dwa *lewobieżne* elektrony o niskich energiach (każdy o pędzie bliskim $-k_F$) mogą w wyniku takiego procesu przejść w dwa elektrony *prawobieżne* (każdy o pędzie bliskim k_F).

Na pierwszy rzut oka [proces ten] powinien być reprezentowany członem [oddziaływania] $\Psi_R^\dagger(x)\Psi_R^\dagger(x)\Psi_L(x)\Psi_L(x)$. Człon taki jest jednak niedozwolony z powodu zakazu Pauliego. (Wyjaśnia to prawdopodobnie, dlaczego proces *umklapp* nie został wzięty pod uwagę w oryginalnej pracy Luthera i Peschela). Dozwolony jest jednak człon następnego rzędu postaci $(\Psi_R^\dagger(x)\partial_x\Psi_R^\dagger(x))(\Psi_L(x)\partial_x\Psi_L(x))$, który po „zbożoznizowaniu” daje człon $\cos 2\theta \equiv \cos(2(\varphi_R(x) - \varphi_L(x)))$. Proces *umklapp* jest w kwantowym analogu przemiany Bierezińskiego–Kosterlitz–Thoulessa przejściem polegającym na *rozdzieleniu się podwójnego wiru*. Takie przejście jest dozwolone, podczas gdy przejście polegające na *rozdzieleniu się pojedynczego wiru* jest zabronione przez zasadę zachowania pędu. W modelu kwantowej teorii pola w dwóch (1 + 1) wymiarach analogiem zwykłego procesu rozdzielania się pojedynczego wiru z dwuwymiarowej teorii klasycznej byłby [proces reprezentowany przez człon] $\cos \theta$, który staje się istotny⁵ (i prowadzi do powstania przerwy w widmie) gdy $\eta > \frac{1}{4}$. Uogólniając: człon $\cos(m\theta)$ staje się istotny, gdy $\eta > \frac{1}{4}m^2$, co doskonale zgadza się z tym, że człon

$$H = \sum_i \frac{1}{2}(S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+) + \lambda S_i^z S_{i+1}^z$$

$\lambda < 1$ easy plane ↓ $\lambda > 1$ easy axis

$$H = \sum_i \frac{1}{2}(c_i^+ c_{i+1} + c_{i+1}^+ c_i) + \lambda(n_i - \frac{1}{2})(n_{i+1} - \frac{1}{2})$$



$\lambda = 0$ free fermions

$4k_F = \frac{2\pi}{a}$ (Bragg vector)

“Umklapp processes”

Half-filled band (in zero magnetic field)

Ryc. 6. Transformacja Jordana–Wignera odwzorowuje heisenbergowski łańcuch spinów $S = \frac{1}{2}$ o zerowym namagnesowaniu w połowicznie zapełnione pasmo oddziałujących bezspinowych fermionów; $4k_F$ jest tu wektorem Bragga

5. W sensie klasyfikacji operatorów występujących w hamiltonianie kwantowej teorii pola na istotne, marginalne i nieistotne, albo inaczej, na superrenormalizowalne, renormalizowalne i nierenormalizowalne (przypr. tłum.).

$\cos 2\theta$, powodujący [proces będący analogiem] rozdzielania się podwójnego wiru, staje się istotny (przy braku członu $\cos \theta$) dokładnie wtedy, gdy model staje się typu XXX, tj. izotropowy i wykładnik krytyczny $\eta = 1$.

Uwzględnienie tego elementu dopełniło teoriopłowy obraz [układu oddziałujących] spinów $S = \frac{1}{2}$, pod który podwaliny położyli Luther i Peschel. Zlikwidowało także pozornie wyróżniony status modelu spinów $S = \frac{1}{2}$, który wydawał się wynikać z możliwości odwzorowania go na model fermionów. Bozonizacja pozwoliła teraz reprezentować [takie układy] przez dwa *chiralne* (lewo- i prawobieżne) [charakteryzujące się] topologicznymi liczbami nawinięć pola $\varphi_L(x)$ i $\varphi_R(x)$, nie mające żadnego oczywistego związku z wartością S spinu charakteryzującą wyjściowy łańcuch spinowy.

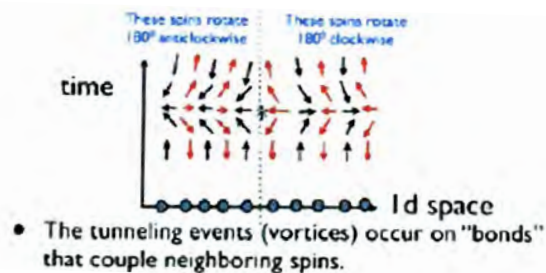
Płaski układ spinów typu XY można obrazowo przedstawić jako zbiór „igieł kompasów” wskazujących w każdym punkcie dwuwymiarowej płaszczyzny pewien kierunek ($\cos(\varphi(x))$, $\sin(\varphi(x))$). Jeśli układ spełnia periodyczne warunki brzegowe na okręgu o obwodzie równym L , to musi zachodzić równość $\varphi(x+L) = \varphi(x) + 2\pi W$. Liczba W jest tu topologicznym niezmiennikiem, *liczbą nawinięć*, który nie może się zmienić, jeśli pole $\varphi(x)$ zmienia się z położeniem x w sposób gładki. W klasycznym dwuwymiarowym modelu XY pole $\varphi(x, y)$ jest gładkie wszędzie z wyjątkiem punktów osobliwych (x_0, y_0) , w których znajdują się centra wirów. W modelu kwantowym sformułowanym w $1+1$ wymiarach, punkty takie stają się punktami (x_0, t_0) czasoprzestrzeni i reprezentują miejsca zajścia procesów tunelowania (które nazwano *instantonami*), będących osobliwymi procesami zachodzącymi niemal całkowicie w punkcie x_0 w krótkim odcinku czasu wokół t_0 , w wyniku których zmienia się liczba nawinięć.

Okazało się, że w przypadku łańcucha spinów S mającego łatwą płaszczyznę i zerowe namagnesowanie w kierunku osi z typowo zachodzi zwykły jednowirowy proces instantonowy Bierzzińskiego–Kosterlitz–Thoulessa. Proces taki jest jednak wzbudzony przez *ściłą kwantową interferencję*, gdy $2S$ jest liczbą nieparzystą. Uwypukla to różnicę istniejącą między klasyczną mechaniką statystyczną przemiany Bierzzińskiego–Kosterlitz–Thoulessa w dwóch wymiarach i jej kwantową wersją w $1+1$ wymiarach. W przypadku modelu klasycznego wiru wnoszą do czynnika Boltzmannowskiego przyczynę, który ma postać rzeczywistego i dodatniego czynnika zwanego lotnością; w kwantowym modelu w $1+1$ wymiarach przyczynę ten jest zespoloną amplitudą tunelowania między topologicznie różnymi konfiguracjami [pola] o różnych liczbach nawinięć; w modelach niezmienniczych względem odwrócenia czasu jest on rzeczywisty, ale może być ujemny bądź dodatni. Oznacza to, że między konkuru-

jącymi między sobą procesami instantonowymi może zachodzić kwantowa interferencja.

W tym szczególnym przypadku procesy tunelowania są skoncentrowane na środkowym punkcie *złącza* pomiędzy dwoma sąsiednimi spinami. Przy założeniu, że łańcuch spinów jest niezmienniczy względem przestrzennych przesunięć o jeden węzeł, *wartość* amplitudy tunelowania musi być zawsze taka sama, niezależnie od tego, na którym złączu proces ten zachodzi. Kiedy jednak dwa takie procesy zachodzą na kolejnych złączach, różnią się one przede wszystkim tym, że spin [znajdujący się pomiędzy tymi złączami], który przy jednym procesie obracał się o 180° zgodnie z ruchem wskazówki zegara, przy drugim procesie obraca się o też 180° , ale w przeciwną stronę. Oba te procesy różnią się więc na czysto o obrót tego jednego spinu o 360° ; ewolucja pozostałych spinów [przy obu tych procesach] jest zasadniczo taka sama. Fundamentalna różnica między łańcuchami spinów całkowitych i łańcuchami spinów połówkowych polega na tym, iż w przypadku tych drugich w rezultacie takiego obrotu stan układu zmienia znak. Jeśli związany z procesem obrotu przekaz energii jest taki sam, niezależnie od złącza, na którym obrót zachodzi, oznacza to wystąpienie interferencji amplitud odpowiadających tunelowaniu poprzez instantony na kolejnych złączach i interferencja ta jest destruktywna, gdy spiny są połówkowe, a konstruktywna, gdy spiny są całkowite.

Daje to topologiczne wyjaśnienie, dlaczego proces instantonowy, który staje się istotny, gdy anizotropia układu XXZ spinów $S = \frac{1}{2}$ zmienia się z anizotropii typu łatwej płaszczyzny na typu łatwej osi, odpowiada rozdzielaniu się *podwójnego wiru* w przemianie Bierzzińskiego–Kosterlitz–Thoulessa. Proces taki powoduje tylko niestabilność topologicznie uporządkowanej fazy układu o łatwej płaszczyźnie ponieważ, gdy spin S jest połówkowy, efekty dominującego procesu odpowiadającego pojedynczemu wirowi są znoszone przez destruktywną interferencję. Gdy jednak spin S jest całkowity, efekty tego ostatniego procesu są wzmacniane przez interferencję i przemiana BKT zachodzi, gdy tylko wykładnik η charakteryzujący funkcje korelacji dochodzi do wartości granicznej $\eta = \frac{1}{4}$, przy której istotne staje się tunelowanie między stanami o różnych liczbach nawinięć; topologiczne uporządkowanie zostaje wtedy zniszczone i w widmie wzbudzeń powstaje przerwa. W punkcie krytycznym korelacje Néela $\langle S_n^x S_{n'}^x \rangle$, $\langle S_n^y S_{n'}^y \rangle$ zanikają dużo szybciej, niż korelacje $\langle S_n^z S_{n'}^z \rangle$, co oznacza, że przemiana zachodzi zanim jeszcze układ stanie się izotropowym układem Heisenberga. Jest to także przemiana, w której stan podstawowy układu staje się jednoznaczny (singletowy), natomiast gdy istotny jest [dopiero] proces dwuwirowy, prowadzi on do dwukrotnie zdegenerowanego (dubletowego)



Ryc. 7. W $1 + 1$ -wymiarowej czasoprzestrzeni analogiem wirów występujących w modelu sformułowanym w dwuwymiarowej przestrzeni euklidesowej są instantonowe procesy tunelowania, w wyniku których ulega zmianie topologiczna liczba nawinięć łańcucha spinów mającego łatwą płaszczyznę. Proces taki jest ześrodkowany na złączu pomiędzy kolejnymi węzłami, w których lokalny parametr porządku Néela staje się nieciągły na bardzo krótki czas

stanu podstawowego, ponieważ zachowuje liczbę nawinięć modulo 2.

Dzięki tym wynikom stało się jasne, że uszeregowanie modeli antyferromagnetyków od mających łatwą płaszczyznę do mających łatwą oś ma zupełnie inny charakter, gdy spin S jest całkowity i gdy jest połówkowy. Gdy wzrasta wartość parametru λ łańcucha spinów połówkowych, przy wartości $\lambda = 1$ zachodzi bezpośrednio podwójna przemiana BKT od topologicznie uporządkowanego antyferromagnetyka o łatwej płaszczyźnie i bez przerwy [w widmie energii], gdy $\lambda < 1$, do mającego przerwę antyferromagnetyka o łatwej osi i dubletowym, łamiącym symetrię stanie podstawowym Isinga–Néela, gdy $\lambda > 1$. Natomiast w przypadku łańcucha spinów całkowitych przy $\lambda = \lambda^c < 1$ zachodzi zwykła przemiana BKT do stanu cieczy spinowej o niełamiącym żadnej symetrii singletowym stanie podstawowym, a dopiero po niej, przy $\lambda = \lambda^c > 1$, następuje druga przemiana typu Isinga do charakteryzującego się łatwą osią stanu Isinga–Néela.

Ujawnia to fundamentalną topologiczną różnicę istniejącą między antyferromagnetycznymi (izotropowymi) łańcuchami spinów Heisenberga o spinach S całkowitych i połówkowych. Różnica ta podważyła powszechny wcześniej pogląd, że wartość S spinu pełni tylko rolę parametru rozwinięcia według potęg $1/S$ analogicznego do semiklasycznego rozwinięcia według potęg stałej Plancka \hbar . Zgodnie z tym poglądem asymptotyczne długozasięgowe zachowanie funkcji korelacji $\langle \vec{S}_n \cdot \vec{S}_{n'} \rangle$ powinno mieć postać $(-1)^{n-n'} |n - n'|^{-\eta}$ z wykładnikiem $\eta(S^{-1})$ będącym gładką funkcją argumentu S^{-1} , znikającą, gdy $S^{-1} \rightarrow 0$.

Moje — w roku 1981 heretyckie — stwierdzenie, że istnieje fundamentalna różnica między jednowymiarowymi kwantowymi antyferromagnetykami o spinach S całkowitych i połówkowych, było przypuszczalnie najmniej uzasadnione i moja praca w pierwotnej swojej wersji (Haldane, 1981a) została odrzucona przez kilka

czasopism; sceptycy nazywali zawarte w niej stwierdzenie hipotezą i to określenie, jak się wydaje, do niego przylgnęło! Praca ta, zanim została w końcu opublikowana (Haldane, 1983), została w dużym stopniu napisana na nowo, by lepiej omówić przypadek izotropowego modelu Heisenberga, a pierwotny jej preprint — tak się wydawało — w końcu zaginął, gdyż były to czasy zanim preprinty zaczęły być archiwizowane w internecie. Szczęśliwie odzyskałem niedawno jego kopię — przechował ją Jenő Sólyom — i umieściłem ją w celach historycznych w internetowym archiwum arXiv (Haldane, 1981a). Późniejsze studia Boteta i Julliena (Botet i Jullien, 1983) wykorzystujące ścisłą numeryczną diagonalizację potwierdziły stwierdzenia zawarte w tej pracy, a rozpraszania neutronów na quasi-jednowymiarowych organicznych związkach NENP niklu zbadane przez Billa Buyersa (Buyers i inni, 1986) dostarczyło w końcu eksperymentalnego dowodu na to, że stan podstawowy antyferromagnetyka o spinie $S = 1$ jest stanem singletowym i że widmo energii takiego ferromagnetyka ma przerwę.

Bardziej zasadniczym powodem, dla którego mój wynik z 1981 roku był tak nieoczekiwany było to, że stan cieczy spinowej łańcucha spinów $S = 1$ był pierwszym przykładem *topologicznej materii kwantowej*. Wyprzedził on dokonane przez Berry'ego w roku 1983 odkrycie fazy nazwanej jego imieniem, której istnienie potwierdziło fakt, że w przypadku układów spinowych spinowa liczba kwantowa S odgrywa rolę topologiczną, ponieważ wielkość $2S$ jest zawsze liczbą całkowitą. Patrząc przez pryzmat używanego przez fizyków materii skondensowanej sformułowania hamiltonowskiego, bardzo tajemnicze wydawało się to, iż mechanikę kwantową do wykorzystującej ciągle pola teorii antyferromagnetycznego łańcucha spinów, opartej na tzw. nieliniowym $O(3)$ -symetrycznym modelu sigma, trzeba — jak się wydawało — stosować inaczej w przypadku spinów połówkowych, a inaczej w przypadku spinów całkowitych. W roku 1983 bardzo pomocnej wskazówki dostarczyła rozmowa, jaką odbyłem z Edwardem Wittenem. Wspomniał w niej, że w lagranżowskim sformułowaniu faworyzowanym przez fizyków cząstek elementarnych, w lagranżjanie modelu sigma⁶ może występować dodatkowy *człon topologiczny*, który nie występuje w formalizmie hamiltonowskim i znika całkowicie w granicy klasycznej. Człon taki jest proporcjonalny do parametru zwanego kątem θ . Można też łatwo pokazać, wykorzystując podejście odwołujące się do faz Berry'ego związanych z trajektoriami zakreślonymi przez ewoluujące poszczególne spiny, że kąt ten musi być równy $2\pi S$,

6. Model sigma pełni w fizyce cząstek elementarnych rolę efektywnej teorii oddziaływań niskoenergetycznych mezonów, takich jak mezony π , kaony itp. (przyp. tłum.)

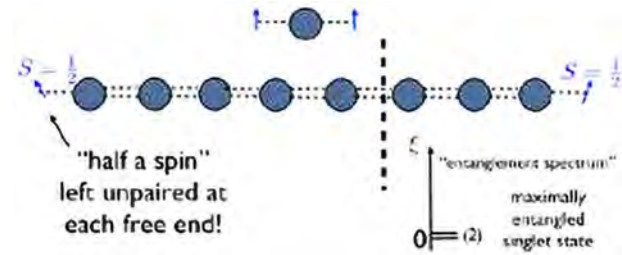
czyli musi przyjmować wartość 0 modulo 2π , gdy spiny są całkowite i wartość π modulo 2π , gdy spiny są półowkowe (są to też jedyne dwie wartości parametru θ zgodne z symetrią odwrócenia czasu). Parametr θ ma związek z *kątem aksjonowym* wprowadzonym w fizyce wysokich energii w celu rozwiązania problemu niełamania parzystości kombinowanej CP przez oddziaływania silne,⁷ oraz z analogicznym kątem wprowadzonym całkiem niedawno w elektrodynamicznej teorii *silnie topologicznych izolatorów* przez Xiao-Liang Qi, Taylora Hughesa i Shouchenga Zhanga (Qi i inni, 2008); w tej teorii przyjmuje on wartość $\theta = 0$ w przypadku nietopologicznych izolatorów respektujących symetrię odwrócenia czasu i wartość $\theta = \pi$ w przypadku trójwymiarowych silnie topologicznych izolatorów zachowujących tę symetrię. Odkrycie możliwości występowania członu θ w lagranżowskim sformułowaniu teorii pola jednowymiarowych antyferromagnetyków wydaje się cezura, po której lagranżowskie sformułowanie stało się powszechnie stosowanym w teoretycznej kwantowej fizyce materii skondensowanej i jest obecnie standardowym narzędziem uzupełniającym podejście hamiltonowskie.

Prosty modelowy stan, ujmujący istotę oddzielnego przerwy od reszty widma stanu jednowymiarowego antyferromagnetyka zbudowanego ze spinów całkowitych, został później skonstruowany przez Iana Afflecka, Toma Kennedy'ego, Hala Tasaki i Elliota Lieba (Affleck i inni, 1987). Jest to także ścisły stan podstawowy zmodyfikowanego zabawkowego modelu AKLT. Przykład ten jest wyjątkowo pouczający, gdyż pokazuje szczególność natury kwantowego splątania stanu topologicznego. W konstrukcji AKLT obiekt o spinie 1 jest przedstawiony jako symetryczny stan dwóch spinów $\frac{1}{2}$, półspinów, z których każdy, przez sparowanie się z jednym z sąsiadujących z nim półspinów, może tworzyć splątany stan singletowy

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

wiązania walencyjnego. Jeśli końce łańcucha spinów $S = 1$ są swobodne (tzn. jest on *otwarty*), to na każdym z nich pozostaje jeden niesparowany spin $\frac{1}{2}$. Model ten ujawnia zasadniczo *splątana* naturę stanu [łańcucha spinów całkowitych]: jeśli łańcuch taki rozetniemy na dwie części, po obu stronach rozcięcia pojawią się niesparowane spinowe stopnie swobody o $S = \frac{1}{2}$. *Spektrum splątania* takiego modelowego stanu jest więc bardzo charakterystycznym prostym spektrum pojedynczego dubletu spinów $\frac{1}{2}$ (Li i Haldane, 2008). To, że wszystkie stany w widmie splątania są dubletami i że na swobodnych

końcach długiego otwartego łańcucha spinów zlokalizowane są lokalne stopnie swobody spinu $\frac{1}{2}$ (ryc. 8), jest cechą wszystkich stanów należących do tej samej topologicznej klasy stanów co modelowy stan AKLT, włączając w to także standardowy antyferromagnetyk Heisenberga zbudowany ze spinów $S = 1$, który badałem wcześniej.



Ryc. 8. W konstrukcji AKLT stanu podstawowego układu spinów $S = 1$, każdy spin $S = 1$ jest traktowany jak symetryczna kombinacja dwóch półspinów $S = \frac{1}{2}$, z których jeden tworzy singletowe wiązanie walencyjne z półspinem sąsiadującym z nim z prawej strony, a drugi z półspinem sąsiadującym z nim z lewej strony. Na każdym z otwartych krańców łańcucha pozostaje niesparowany jeden spin $S = \frac{1}{2}$ i widmo splątania składa się z pojedynczego dubletu

Mimo iż na końcach każdego łańcucha całkowitych spinów S istnieją lokalne stopnie swobody spinów $\frac{1}{2}S$ i ponieważ elementarnymi wzbudzeniami całego układu, oddzielnymi od stanu podstawowego przerwy, są magnony o spinie 1, których stany mogą być zlokalizowane na krańcach łańcucha, spiny tam ulokowane są topologicznie chronione tylko wtedy, gdy S jest *nieparzystą* liczbą całkowitą. Ostateczna klasyfikacja (Chen i inni, 2013) jest więc taka, że tylko stan łańcucha spinów o S będącym nieparzystą liczbą całkowitą jest chronionym przez symetrię (symetrią tą jest albo symetria względem odwrócenia czasu lub symetria względem odbicia przestrzennego) stanem topologicznym (czyli tzw. stanem SPT) charakteryzującym się typową podwójną degeneracją stanów w widmie splątania.

Wieloletnie badania topologicznego stanu antyferromagnetyka Heisenberga zbudowanego ze spinów $S = 1$ okazały się niezwykle owocne. Szczegółowe badanie jego topologicznej stabilności doprowadziło do podania przez Xiao-Gang Wena i współpracowników (Chen i inni, 2013) jednolitej klasyfikacji chronionych przez symetrię stanów topologicznych zarówno w jednym, jak i w większej liczbie wymiarów. Ponadto spektrum splątania takiego stanu jest głównym elementem *grupy re-normalizacji macierzy gęstości* (White, 1992) i technik opartych na *stanach macierzowo iloczynowych*, które zostały rozwinięte częściowo w celu testowania i sprawdzania tzw. hipotezy Haldane'a. Cechy nieoczekiwane chronionych topologicznie stanów brzegowych ujawniają się wciąż na nowo w związku z *topologicznymi stanami materii*, np. przy okazji tzw. modów Majorany, które wystę-

7. O aksjonach i roli kąta θ w fizyce wysokich energii zob. wykład noblowski Franka Wilczka *Postępy Fizyki* 56 (4), 154 (2005) (przyp. tłum.).

pują na brzegach topologicznych nadprzewodzących wirów; prosty *zabawkowy model* takich stanów, odgrywający podobną rolę co model AKLT, podał Kitajew (Kitayev, 2001). Stany te są obecnie uznawane za możliwe podłoże, na którym można będzie zrealizować przyszłe topologiczno-kwantowe przetwarzanie informacji. Rozwój fizyki materii skondensowanej, jaki wyniknął z nieoczekiwanego odkrycia około roku 1980 topologicznych faz materii, okazał się zaskakująco bogaty!

Patrząc wstecz na to, jak rozwinęła się dziedzina topologicznej kwantowej materii, którą zainicjowały tamte odkrycia uderza mnie, jak ważne w odkrywaniu nowej fizyki było wykorzystanie zabawkowych modeli ilustrujących samą istotę rozpatrywanych problemów. Zwykło się myśleć o modelach jednowymiarowych, że są one tylko „zadaniami domowymi”, które trzeba odrobić przed przystąpieniem do badania rzeczywistych trójwymiarowych układów. W istocie, częściowo z powodu tego, że skutki kwantowych fluktuacji są najbardziej spektakularne w układach niskowymiarowych, właśnie taki sposób postępowania umożliwił odkrycie wielu interesujących zjawisk i stworzenie zupełnie nowego sposobu patrzenia na fizykę materii skondensowanej i egzotyczne stany topologiczne.

Przypadł mi w udziale przywilej uczestniczenia w otwarciu nowej dziedziny, do której wielu innych przyczyniło się zdumiewającymi odkryciami i która doprowadziła do marzeń o nowych kwantowych technologiach przetwarzania informacji. Dziękuję Królewskiej Szwedzkiej Akademii Nauk za uhonorowanie moich współlaureatów oraz mnie samego i tym samym całej tej ekscytującej dziedziny fizyki.

Literatura

- Affleck, I., T. Kennedy, E. H. Lieb, H. Tasaki (1987), *Phys. Rev. Lett.* **59**, 799.
- Berry, M. V. (1984), *Proc. R. Soc. Lond. A* **392** (1802), 45.
- Bethe, H. (1931), *Z. Phys.* **71** (3), 205.
- Botet, R., R. Jullien (1983), *Phys. Rev. B* **27**, 613.
- Buyers, W. J. L., R. M. Morra, R. L. Armstrong, M. J. Hogan, P. Gerlach, K. Hirakawa. (1986), *Phys. Rev. Lett.* **56**, 371.
- Chang, C.-Z., J. Zhang, X. Feng, J. Shen, Z. Zhang, M. Guo, K. Li, Y. Ou, P. Wei, L.-L. Wang, Z.-Q. Ji, Y. Feng, S. Ji, X. Chen, J. Jia, X. Dai, Z. Fang, S.-C. Zhang, K. He, Y. Wang, L. Lu, X.-C. Ma, Q.-K. Xue (2013), *Science* **340** (6129), 167.
- Chen, X., Z.-C. Gu, Z.-X. Liu, X.-G. Wen (2013), *Phys. Rev. B* **87**, 155114.
- Faddeev, L., L. Takhtajan (1981), *Physics Letters A* **85** (6), 375.
- Fradkin, E., E. Dagotto, D. Boyanovsky (1986), *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2967.
- Fu, L., C. L. Kane, E. J. Mele (2007), *Phys. Rev. Lett.* **98**, 106803.
- Haldane, F. D. M. (1981a), ILL preprint SP81/95, arXiv:1612.00076.
- Haldane, F. D. M. (1981b), *Journal of Physics C: Solid State Physics* **14** (19), 2585.
- Haldane, F. D. M. (1983a), *Phys. Lett.* **93A**, 464.
- Haldane, F. D. M. (1983b), *Phys. Rev. Lett.* **50**, 1153.
- Haldane, F. D. M. (1988), *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2015.
- Haldane, F. D. M., S. Raghu (2008), *Phys. Rev. Lett.* **100**, 013904.
- Halperin, B. I. (1982), *Phys. Rev. B* **25**, 2185.
- Hofstadter, D. R. (1976), *Phys. Rev. B* **14**, 2239.
- Jordan, P., E. Wigner (1928), *Z. Phys.* **47** (9), 631.
- Kane, C. L., E. J. Mele (2005), *Phys. Rev. Lett.* **95**, 146802.
- Kitayev, A. Y. (2001), *Physics-Uspekhi* **44** (10S), 131.
- Klitzing, K. v., G. Dorda, M. Pepper (1980), *Phys. Rev. Lett.* **45**, 494.
- Laughlin, R. B. (1981), *Phys. Rev. B* **23**, 5632.
- Li, H., F. D. M. Haldane (2008), *Phys. Rev. Lett.* **101**, 010504.
- Luther, A., I. Peschel (1975), *Phys. Rev. B* **12**, 3908.
- Luttinger, J. M. (1963), *Journal of Mathematical Physics* **4** (9), 1154.
- Mattis, D. C. M., E. H. Lieb (1965), *Journal of Mathematical Physics* **6** (2), 304.
- Moore, J. E., L. Balents (2007), *Phys. Rev. B* **75**, 121306.
- Qi, X.-L., T. L. Hughes, S.-C. Zhang (2008), *Phys. Rev. B* **78**, 195424.
- Roy, R. (2009), *Phys. Rev. B* **79**, 195322.
- Schotte, K. D., U. Schotte (1969), *Phys. Rev.* **182**, 479.
- Semenoff, G. W. (1984), *Phys. Rev. Lett.* **53**, 2449.
- Simon, B. (1983), *Phys. Rev. Lett.* **51**, 2167.
- Thouless, D. J., M. Kohmoto, M. P. Nightingale, M. den Nijs (1982), *Phys. Rev. Lett.* **49**, 405.
- Tomonaga, S. (1950), *Prog. Theor. Phys.* **5** (4), 544.
- Tsui, D. C., H. L. Stormer, A. C. Gossard (1982), *Phys. Rev. Lett.* **48**, 1559.
- Wan, X., A. M. Turner, A. Vishwanath, S. Y. Savrasov (2011), *Phys. Rev. B* **83**, 205101.
- White, S. R. (1992), *Phys. Rev. Lett.* **69**, 2863.

Magdalena Staszel

Redaktor Magdalena Staszel

odeszła od nas 4 sierpnia 2020 roku po ciężkiej chorobie. Karierę naukową rozpoczęła badaniami w dziedzinie teorii cząstek i oddziaływań elementarnych, by następnie całkowicie poświęcić uwagę zagadnieniom dydaktyki fizyki. Przez wiele lat kierowała Zakładem Dydaktyki Fizyki Wydziału Fizyki UW. Aktywnie uczestniczyła w poszukiwaniach nowych sposobów nauczania fizyki. Przygotowała do pracy w szkole wielu nauczycieli fizyki i przyrody.

Równoległe przez 30 lat (1982-2012) była redaktorem naszego czasopisma. Dzięki jej wiedzy merytorycznej, doświadczeniu, skrupulatności, dokładności, cierpliwości i doskonałemu wyczuciu słowa pisanego w *Postęпах Fizyki* ukazywały się przez te wszystkie lata teksty świetnie zredagowane przez Magdę Staszel i przygotowane do publikacji na najwyższym poziomie edytorskim.

Redakcja PF

Wspomnienie o doktor Magdalenie Staszel

Magda swoje życie poświęciła fizyce i jej nauczaniu. Wydział Fizyki UW był Jej drugim domem. Ze względu na olbrzymią wiedzę i wieloletnie doświadczenie prowadziła zajęcia jeszcze długo po przejściu na emeryturę. Zawsze dawała jasno do zrozumienia, że pracuje dla frajdy z nauczania fizyki, a nie dla wynagrodzenia. Każdy mógł liczyć na Jej bezinteresowną pomoc, koleżeńską radę.

Magda zajmowała się początkowo teorią fizyki cząstek i oddziaływań elementarnych, głównie reakcjami hadronowymi, a następnie funkcją struktury fotonu. Razem z Tadeuszem Pniewskim współtworzyła następnie Zakład Dydaktyki Fizyki, którego była wieloletnim kierownikiem. Przez dziesiątki lat prowadziła wykłady, ćwiczenia, pracownie, seminaria i warsztaty poświęcone dydaktyce fizyki. Pojęciu energii w edukacji poświęciła szereg publikacji i wystąpień na międzynarodowych konferencjach. Tworzyła pracownie dydaktyki fizyki i przyrody, w tym również w ramach projektu europejskiego oraz Międzywydziałowego Podyplomowego Studium Nauczania Przyrody. Regularnie prezentowała fizyczne zabawki na Festiwalu Nauki i Pikniku Naukowym. Przez wiele lat uczestniczyła w pracach Redakcji *Postępów Fizyki*, a także Polskiego Towarzystwa Fizycznego.

Była członkiem Rady Programowo-Redakcyjnej Polskiego Stowarzyszenia Nauczycieli Przedmiotów Przyrodniczych.

Magdo, brakuje nam Twojego uśmiechu, pozytywnego nastawienia, rozmów o dydaktyce. Tych chwil, gdy wyjmowałaś ze swojego archiwum opracowania zagadnień dla naszych studentów, przyszłych nauczycieli, a ze skrzynki – twoje fantastyczne zabawki fizyczne.

Piotr Nieżurawski,
Zakład i Pracownia Dydaktyki Fizyki
Wydziału Fizyki UW

Pożegnanie Magdy

Z Magdą miałam przyjemność pracować ponad 30 lat w Zakładzie Dydaktyki Fizyki utworzonym wcześniej przez Magdę oraz Tadeusza Pniewskiego. Pamiętam, że postanowiłam współpracować z zespołem tego Zakładu, kiedy zobaczyłam jej fascynujące pokazy dotyczące ruchu falowego dla nauczycieli fizyki. Ciepło przyjęta przez Magdę korzystałam z Jej cennych rad i wszelkiego rodzaju wsparcia. Magda była mądra, opanowana, cierpliwa i ciepła, zawsze pomagała mi rozwikłać wszelkie wątpliwości natury merytorycznej, wszak wcześniej prowadziła badania o dużym ciężarze gatunkowym z zakresu fizyki teoretycznej.

Z inicjatywy Magdy podjęliśmy współpracę z czeskim Uniwersytetem Karola w Pradze. Przez 10 lat na Targu Pomysłów Nauczycieli (w j. czeskim pomysły to *napady*) w Pradze demonstrowaliśmy nasze doświadczenia – w j. czeskim *pokusy*. Profesor Ružena Kolažowa z Uniwersytetu Karola zawsze czuwała nad tym, bym przyjeżdżała z Magduszką. Niezwykle ceniła Magdy wiedzę i życzliwość do studentów oraz współpracowników.

Najdłuższa nasza współpraca dotyczyła tworzenia programów oraz prowadzenia zajęć w Międzywydziałowym Podyplomowym Studium Nauczania Przyrody. Uczestniczyliśmy w pracach Rady Programowej oraz prowadziliśmy laboratorium. Magda z zapałem planowała i realizowała ciekawe eksperymenty, mając przy tym duże doświadczenie, ponieważ wcześniej uczestniczyła w organizowaniu pierwszych Pikników Naukowych i Festiwalu Nauki, gdzie demonstrowała zabawki fizyczne, których posiadała wielką skrzynię. Na wszystkich zagranicznych konferencjach poszukiwała ciekawych zabawek fizycznych.

Będąc już na emeryturze, towarzyszyła mi w prowadzeniu zajęć laboratoryjnych w ostatniej edycji stacjonarnych zajęć dla studentów przyrodników, tj. do końca semestru letniego 2019. Stwierdziła wtedy z radością, że była to dla Niej najwspanialsza przygoda życiowa. Przekazałam nawet Madzi dokumenty związane z naszymi ostatnimi zajęciami z nadzieją, że będzie ich kontynuacja... Powiedziała wówczas „nie jestem Panią życia”, ale z uśmiechem, jak zawsze to czyniła, zapewniała, że po terapii czuje się lepiej i nie wyklucza powrotu na uczelnię.

Droga Madziu, jesteśmy Ci wdzięczni za Twoje mądre rady, ciepłe słowa, ciekawe pomysły, które przynoszą i będą przynosiły owoce w pracy naszych absolwentów – nauczycieli fizyki i przyrody. Zostaniesz dla nas wzorem nauczyciela fizyki i przyrody a zarazem, jak powiedział profesor Kotarbiński, wzorem nauczyciela społecznego. W języku czeskim społecznym znaczy godny zaufania. Ty Madziu byłaś godna zaufania, dobra, o czułym sercu, wrażliwa na cudze potrzeby i skłonna do pomocy. Dziękujemy Ci za to, taką Cię zapamiętamy.

Stefania Elbanowska-Ciemuchowska

Moja przyjaciółka Madzia — skrawki wspomnień

Niedługo przed śmiercią przysłała mi koperty ze zdjęciami. Te koperty to cała Madzia, bardzo starannie uporządkowane, opisane datami i miejscami. Na niektórych fotografiach widnieje również ona. Są to pamiątki z naszych wyjazdów na cykliczne spotkania GIREP (International Research Group on Physics Teaching). Najwcześniejsze zdjęcie, jakie mam, jest datowane 1993. Na pewno raz albo i dwa wybrałyśmy się tam moim małym (Fiat 126). Mnie się wtedy wydawało, że Ma-

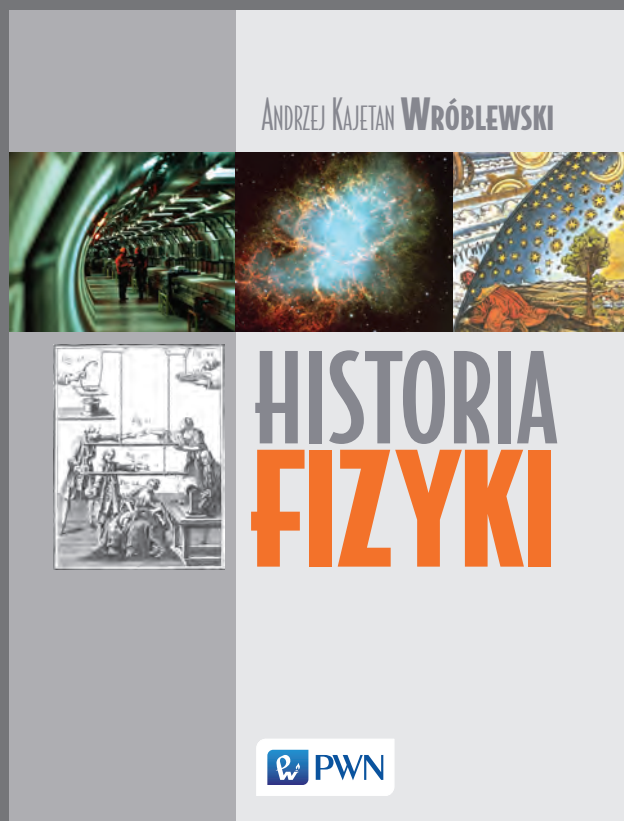
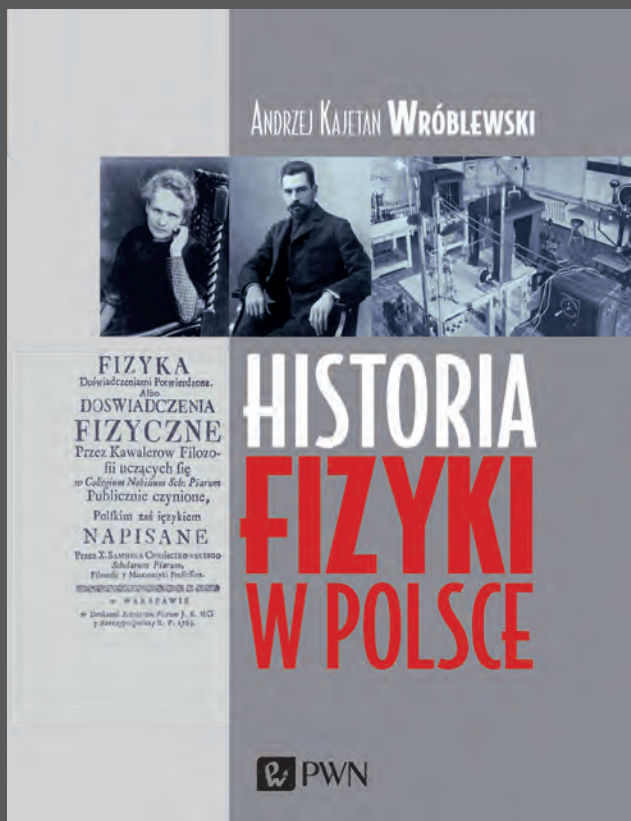
dzia miała jakiś rys czarnowidztwa w stylu "to się nie uda", „nie znajdziemy hotelu" itp. Miała zawsze w podróży taką walizeczkę ojca, a w niej wszystko starannie poukładane, posegregowane. Zazdrościłam jej tej walizeczki, ale mnie, na mój bałagan, nawet taka walizeczka by nie pomogła. Można powiedzieć, że „zjadłyśmy razem beczkę soli”.

Rozmawiałam z nią przez telefon stosunkowo niedługo przed jej odejściem. Zawsze brzmiała jak skowronek, mówiła że jest OK, że radzi sobie. Ja byłam upierdliwie nachalna i namawiałam ją, by ułatwiała sobie życie, np. by zamawiała karmę dla 4 kotów z dostawą do domu, miałam nawet jakiś żal do jej kolegów z pracy, że nikt jej w tym nie pomoże! Madzia nie była za grosz asertywna (tak mi się wydaje), a jednocześnie nie chciała nikomu robić kłopotu.

Myślała zawsze dogłębnie. Niesłuchanie przejrzyście, uporządkowanie prowadziła notatki i przygotowywała materiały dla studentów. Przyjaźniłyśmy się, łączyła nas przeszłość „cząstkowa” (obie rozpoczynałyśmy przygodę z fizyką od fizyki wysokich energii), a później dydaktyka fizyki. Bardzo się różniłyśmy, ja zawsze rozwichrzona, nieuporządkowana, Ona przeciwnie. Pewnie musiałam ją często irytować, ale nigdy nie dała mi tego poznać; zdając sobie z tego sprawę byłam jej za to bardzo wdzięczna. Mówiła do mnie Słonko lub Słoneczko.

Ze dwa, a może i więcej razy spędziłyśmy dwutygodniowe wakacje w mojej wiejskiej chatce. Pamiętam, jak uciekałyśmy przed krową, a chyba nie raz przed burzą. To były cudne chwile, nie zawsze musiałyśmy wiele mówić, bo świetnie rozumiałyśmy się bez słów. **Mało z kim było mi tak dobrze.**

Zofia Gołąb-Meyer



HISTORIA FIZYKI W POLSCE to kompleksowy opis rozwoju fizyki od początków naszej państwowości, aż do czasów współczesnych. Autor prezentuje rozwój polskich badań w dziedzinie fizyki na tle historii nauki europejskiej, a także historii szkolnictwa uniwersyteckiego w Europie. Publikacja składa się z czterech części: pierwsza obejmuje okres do utraty niepodległości w roku 1795, druga poświęcona jest rozwojowi fizyki na ziemiach polskich w okresie zaborów, trzecia dotyczy polskiej fizyki w okresie międzywojennym, czwarta zaś to historia fizyki w Polsce po 1945 roku.

Czytając tę książkę:

- poznajemy mało znane fakty z życia polskich uczonych mających wpływ na rozwój rodzimej, jak i światowej fizyki,
- uświadamiamy sobie, z jakimi trudnościami i ograniczeniami technologicznymi oraz geopolitycznymi musieli zmagać się polscy fizycy,
- dowiadujemy się, jak polska nauka wyglądała na tle rozwiązań światowych oraz jaki był wkład polskich fizyków w rozwój nauki i kultury światowej.

Całość wzbogacono o biogramy fizyków oraz nierzadko humorystyczne cytaty z ich opracowań naukowych.

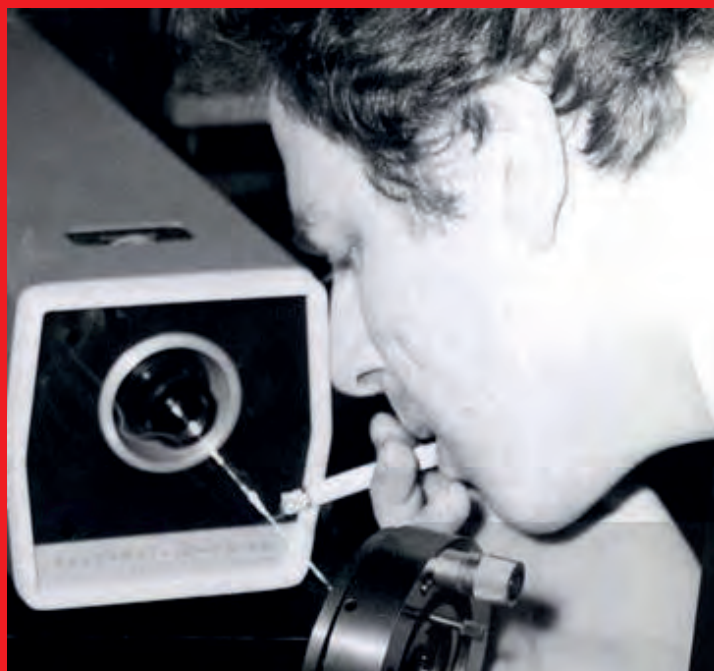
Publikacja skierowana jest do studentów nauk ścisłych i przyrodniczych oraz pracowników naukowo-dydaktycznych w tych dziedzinach. Polecamy ją także profesjonalistom i pasjonatom historii nauki, filozofii i kultury.



Profesor dr hab. Andrzej Kajetan Wróblewski

fizyk i historyk fizyki, absolwent Uniwersytetu Warszawskiego, gdzie pracuje od roku 1954, obecnie jako profesor emerytowany. W latach 1986–1989 pełnił funkcję dziekana Wydziału Fizyki, a w latach 1989–1993 był rektorem Uniwersytetu Warszawskiego.

- Członek: Polskiej Akademii Nauk, Polskiej Akademii Umiejętności, Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego i Polskiego Towarzystwa Astronomicznego.
- Laureat: Nagrody Marii Skłodowskiej-Curie, Medalu Mariana Smoluchowskiego.
- Doktor honoris causa uniwersytetów: Chapmana (Orange, USA), Glasgow (Szkocja), Siegen (Niemcy), Politechniki Warszawskiej, Uniwersytetu Jana Kochanowskiego.
- Autor wielu prac naukowych z fizyki wielkich energii i historii fizyki, w tym *Historii fizyki* (PWN 2006) cieszącej się ogromnym uznaniem Czytelników, a także książek popularnonaukowych *Prawda i mity w fizyce* (Iskry 1987) oraz *300 uczonych prywatnie i na wesoło t. 1, 2* (Prószyński Media).
- Współautor wraz z prof. Januszem A. Zakrzewskim dwutomowego, nowatorskiego podręcznika akademickiego *Wstęp do fizyki* (wydawane przez PWN w latach 1976–1991).



ODYSEJA LASEROWA

Theodore H. Maiman

 PWN

Książka Teodora Maimana **ODYSEJA LASEROWA** jest wyjątkowa pod kilku względami. Po pierwsze, trafia ona do polskiego czytelnika po sześćdziesięciu latach od zbudowania pierwszego lasera emitującego światło widzialne – impulsowego lasera rubinowego. Jest to świetna okazja aby spojrzeć na to odkrycie z pewnego dystansu. Po drugie, autorem książki jest sam odkrywca, co gwarantuje relację „z pierwszej ręki” najlepszego możliwego eksperta. Po trzecie, książka bardzo szeroko przedstawia tło i okoliczności towarzyszące temu odkryciu. Ujawnienie powiązań wielkiego biznesu i uwikłań nauki, a także ukazanie jakże romantycznej postawy osamotnionego badacza idącego pod prąd establishmentu i ostatecznie odnoszącego sukces, to wielka wartość tej książki.

Z recenzji

prof. dr. hab. Wojciecha Gawlika

Wydział Fizyki Astronomii i Informatyki Stosowanej UJ



85. urodziny prof. Michała Hellera



Copernicus
Center
PRESS