

POSTĘPY FIZYKI

CZASOPISMO
POŚWIĘCONE UPOWSZECHNIANIU
WIEDZY FIZYCZNEJ

TOM II ❖ ZESZYT 4-6

PTF

1 ❖ 9 ❖ 5 ❖ 1

Maszynopisy prac należy nadsyłać w 2 egzemplarzach pod adresem redakcji. Wszystkie ryciny mają być zaopatrzone w krótkie objaśnienia do wydrukowania pod nimi. O przyjęciu pracy do druku rozstrzyga Kolegium Redakcyjne. Autorzy otrzymują 25 odbitek bezpłatnie

POLSKIE TOWARZYSTWO FIZYCZNE

POSTĘPY FIZYKI

CZASOPISMO
POŚWIĘCONE UPOWSZECHNIANIU
WIEDZY FIZYCZNEJ

TOM II

2.3-6

POZNAŃ

1 9 5 1

KOMITET REDAKCYJNY

Redaktor

Szczepan SZCZENIOWSKI, Poznań

Członkowie

Władysław KAPUŚCIŃSKI, Warszawa

Stefan PIENKOWSKI, Warszawa

Wojciech RUBINOWICZ, Warszawa

LEOPOLD INFELD

METODA FAKTYZACJI A TEORIA KWANTÓW*)

1. Wstęp

Celem naszym jest przedstawienie tutaj nowej metody rozwiązywania wielu zagadnień z mechaniki kwantowej i elektrodynamiki. Liczne problemy z obu tych dziedzin dają się sprowadzić do zagadnień brzegowych. Sposoby rozwiązywania problemów z mechaniki kwantowej i elektrodynamiki przebyły historycznie te same drogi rozwoju. I tu i tam rozwiązywano pierwotnie skalarne równania cząstkowe, zawierające czy to Laplace'a i czy d'Alemberta. Badanie tych równań i ich rozwiązań jest jednym z najważniejszych osiągnięć fizyki teoretycznej XIX w. Doprowadziło ono do rozwinięcia teorii potencjału i znalezienia wielu nowych funkcji (Bessela, wielomianów Legendre'a, Laguerre'a, Jacobiego, Czebyszewa i Hermite'a). Później, gdy teorie skalarne zastąpione zostały teoriami wektorowymi — równaniami Maxwella i Diraca — technika rozwiązywania nie uległa jednak zmianie. Droga nieraz dość sztuczną (wprowadzenie potencjału skalarnego i wektorowego) sprowadzono te równania znów do równań skalarnych drugiego rzędu z określonymi warunkami brzegowymi. Bezpośrednie rozwiązywanie równań Maxwella czy Diraca, a więc w obu przypadkach równań różniczkowych cząstkowych pierwszego rzędu, było rzadko stosowane i jedynie w najprostszymi przypadkach. Jeśli chodzi o stronę rachunkową, to sytuacja w mechanice kwantowej jest jeszcze prostsza niż w teorii pola elektrycznego, ponieważ warunki brzegowe są organicznie połączone z równaniami różniczkowymi i sprowadzają się zwykle do warunków jednoznaczności, skończoności i całkowalności w kwadracie. Tak więc w obu dziedzinach otrzymujemy równanie typu:

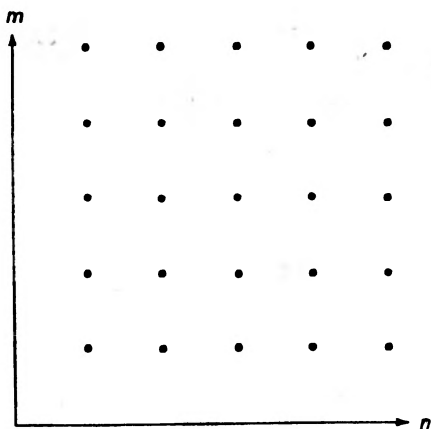
*) Referat ten został opracowany na podstawie wykładów L. Infelda przez Z. Królikowską i J. Werlego.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + r(x, m) y + \lambda y = 0, \quad (1.1)$$

gdzie $r(x, m)$ jest funkcją daną, charakteryzującą określony problem, m zaś stałą separacji, otrzymaną przy przejściu od równania cząstkowego do zwyczajnego, którego musimy przeważnie dokonać, aby otrzymać rozwiązanie. Warunki brzegowe dają nam w typowych przypadkach tylko określony dyskretny zbiór możliwych wartości parametru λ , które nazywamy wartościami własnymi, a rozwiązania należące do nich i spełniające fizyczne warunki — funkcjami własnymi. Tak więc każdej wartości λ_n (przy danym m) przyporządkowane jest rozwiązanie y_n^m .

2. Ogólna charakterystyka metody faktoryzacji

Zamiast wyżej wskazanych dróg analitycznego znajdowania funkcji y_n^m metoda faktoryzacji powraca do pierwotnych równań cząstkowych pierwszego rzędu (Maxwella czy Diraca), lub



Rys. 1

też w razie istnienia równania drugiego rzędu zamienia je na układ równań różniczkowych pierwszego rzędu. W dawnej metodzie, dla obliczenia konkretnych fizycznych wielkości — np. elementów macierzowych różnych obserwabli — potrzebne było znalezienie *explicit* funkcji y_n^m . Metoda nasza natomiast daje proste rozwiązanie wielu problemów bez potrzeby obliczania funkcji y_n^m .

Pierwsze zaczątki metody faktoryzacji można znaleźć w rozwiązaniu przez Diraca problemu oscylatora harmonicznego i mo-

mentu pędu, oraz w pracach F o c k a. Metoda sama została zapoczątkowana przez S c h r ö d i n g e r a w 1940 r. a rozwinięta przeze mnie i moich uczniów.

Podamy tutaj głównie techniczną stronę metody, tymbardziej, że jeśli chodzi o stronę matematyczną, znajduje się w niej jeszcze dużo punktów niejasnych i nieopracowanych. Mogłoby się wydawać komuś, że przeceniam ważność metody faktoryzacji, ponieważ rozwiązania, o które nam chodzi, (zwykle różnego typu wielomiany) są dobrze znane. Problem, z którym spotykamy się w mechanice kwantowej, polega jednak nie tylko na znajomości rozwiązania, ale na posługiwaniu się nim, a to właśnie metoda faktoryzacji wybitnie ułatwia. Wymienię kilka typowych przykładów: przykry problem normalizacji rozwiązań nie istnieje wtedy, gdy używamy metody faktoryzacji. W przypadku rozwiązań równania Diraca, gdzie normalizacja jest specjalnie trudna, została ona podana przy użyciu tej metody w krótkim „liście do Wydawcy“ przez C. C. L i n a. Jednym z podstawowych zagadnień mechaniki kwantowej jest obliczanie natężeń linii widmowych wodoru. Całki, które trzeba w tym celu obliczyć, są bardzo kłopotliwe i wymagają długich rachunków. I ten problem może być rozwiązany w paru liniijkach za pomocą naszej metody. Oczywiście nie wszystkie możliwe zagadnienia dadzą się obliczyć tym nowym sposobem (tak samo i dawny analityczny sposób jest często bezradny). Jest jednak pewna liczba szczególnie ważnych typów równań, które mogą być rozwiązane bezpośrednio metodą faktoryzacji; takich czystych typów jest kilka i każdy z nich ma swój odpowiednik fizyczny czy to w teorii M a x w e l l a, czy w mechanice kwantowej. Nasza technika byłaby jednak zbyt ciasna, gdyby się musiała ograniczyć do rozważania tylko tych niewielu czystych (tj. niezaburzonych) typów. Z tego powodu jest szczególnie ważnym fakt, że dokoła każdego z tych podstawowych równań możemy rozbudować metodę perturbacyjną, rozszerzając wybitnie zakres zastosowań dostępnych naszej metodzie. Także przy zastosowaniu rachunku perturbacyjnego, który naszkicujemy na końcu naszych wykładów, można osiągnąć wyniki szybciej niż przy użyciu starych metod, czego przykładem jest teoria zjawiska S t a r k a.

Na czym polega metoda faktoryzacji poznamy na przykładzie oscylatora harmonicznego. Po pokazaniu paru jeszcze zastosowań tej metody do prostych zagadnień drugiej kwantyzacji i atomu wo-

doru, podamy na końcu krótkie ujęcie ogólne, którego znajomość pozwoli nam na zastosowanie metody faktoryzacji także w innych przypadkach.

3. Oscylator harmoniczny

Energia oscylatora harmonicznego wyraża się klasycznym wzorem:

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}k^2q^2$$

lub też, przyjmując

$$\frac{k^2}{m} = \omega^2$$

mamy

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}\omega^2mq^2 = E. \quad (3.1)$$

W celu przejścia do mechaniki kwantowej podstawiamy w powyższym Hamiltonianie

$$p \rightarrow \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dq} \quad \left(\hbar = \frac{\text{stała Plancka}}{2\pi} \right),$$

otrzymując w ten sposób równanie Schrödingera dla oscylatora harmonicznego kwantowego:

$$\frac{d^2\psi}{dq^2} - \frac{m^2\omega^2}{\hbar^2}q^2\psi + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi = 0. \quad (3.2)$$

Podstawiamy dla uproszczenia:

$$\frac{m\omega}{\hbar}q^2 = \xi^2 \quad (3.3)$$

i dostajemy z (3.2):

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} - \xi^2\psi + \lambda\psi = 0, \quad (3.4)$$

gdzie

$$\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}.$$

Równanie to, jak można sprawdzić, można zapisać na dwa różne sposoby:

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) \psi = (\lambda - 1) \psi, \quad (3.5a)$$

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) \left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) \psi = (\lambda + 1) \psi. \quad (3.5b)$$

Dla skrócenia zapisów wprowadzimy oznaczenia dla operatorów liniowych:

$$\left(\xi - \frac{d}{d\xi}\right) = \hat{H}, \quad (3.6a)$$

$$\left(\xi + \frac{d}{d\xi}\right) = \underset{v}{H}. \quad (3.6b)$$

Równania (3.5ab) przyjmą wtedy postać:

$$\hat{H} \underset{v}{H} \psi = (\lambda - 1) \psi, \quad (3.5'a)$$

$$\underset{v}{H} \hat{H} \psi = (\lambda + 1) \psi, \quad (3.5'b)$$

Już wprost z powyższych równań możemy łatwo znaleźć rozwiązania dla $\lambda = \pm 1$. Dla $\lambda = 1$ zeruje się prawa strona równania (3.5'a); zerowanie się lewej strony uzyskamy, jeśli $\underset{v}{H} \psi = 0$ czyli

$$\xi \psi(1) + \frac{d\psi(1)}{d\xi} = 0;$$

stąd

$$\frac{d \lg \psi(1)}{d\xi} = -\frac{1}{\xi},$$

a więc

$$\psi(1) = c e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

Analogicznie, dla $\lambda = -1$, otrzymamy

$$\psi(-1) = c e^{\frac{\xi^2}{2}}.$$

Ponieważ pierwotne równanie jest równaniem drugiego rzędu, więc musi istnieć jeszcze druga para niezależnych rozwiązań dla tych samych λ . Wychodząc z równania (3.5'a) dla $\lambda = 1$

$$\hat{H} H \psi = 0,$$

widzimy na podstawie pierwszego rozwiązania, że równanie to będzie spełnione także, gdy

$$H \psi(1) = e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

ponieważ $\hat{H} e^{\frac{\xi^2}{2}} = 0$. Rozwiązując równanie różniczkowe:

$$\xi^2 \psi(1) + \frac{d^2 \psi(1)}{d\xi^2} = e^{\frac{\xi^2}{2}}$$

otrzymujemy (zwykłym sposobem za pomocą metody wariacji stałej Lagrange'a):

$$\psi(1) = c e^{-\frac{\xi^2}{2}} \int_0^{\xi} e^{t^2} dt.$$

Podobnie, wychodząc z równania (3.5'b) dla $\lambda = -1$, otrzymamy

$$\psi(-1) = c e^{\frac{\xi^2}{2}} \int_0^{\xi} e^{-t^2} dt.$$

Podamy teraz pewne twierdzenia dotyczące operatorów \hat{H} i H . Definiujemy nawias:

$$(\varphi, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* f dx,$$

gdzie φ^* oznacza funkcję zespoloną sprzężoną z φ .

Twierdzenie I: $(\varphi, \hat{H} f) = (H \varphi, f)$ jeżeli tylko iloczyn $\varphi^* f$ znika w nieskończoności.

Dowód jest oczywisty, jeśli tylko podstawimy za \hat{H} i \hat{H} wyrażenia (3.6) i scałkujemy przez części:

$$\begin{aligned} (\varphi, \hat{H}f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* \cdot \left(\xi f - \frac{df}{d\xi} \right) d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^* \xi f d\xi + \int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{d\varphi^*}{d\xi} d\xi - \varphi^* f \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\left(\xi + \frac{d}{d\xi} \right) \varphi^* \right] \cdot f d\xi = \underset{\vee}{(H\varphi, f)}. \end{aligned}$$

Operatory \hat{H} i \hat{H} o tych własnościach nazywamy s t o w a r z y s z o n y m i.

Twierdzenie II: Którekolwiek z naszych równań drugiego rzędu (3.5'ab) możemy zamienić na następujący układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\hat{H} \psi(\lambda) = A \psi(\lambda + 2), \quad (3.7a)$$

$$H \psi(\lambda + 2) = B \psi(\lambda). \quad (3.7b)$$

Z powyższego układu równań (3.7) wynikają (przez obustronne zastosowanie operatora \hat{H} do równania (3.7a) lub też \hat{H} do równania (3.7b) równania (3.5ab), jeżeli tylko $AB = \lambda + 1$. Mamy bowiem:

$$\underset{\vee}{H} (\hat{H} \psi(\lambda)) = \underset{\vee}{H} A \psi(\lambda + 2) = AB \psi(\lambda) = (\lambda + 1) \psi(\lambda),$$

$$\underset{\vee}{H} (H \psi(\lambda + 2)) = \hat{H} B \psi(\lambda) = AB \psi(\lambda + 2) = (\lambda + 1) \psi(\lambda + 2).$$

Podstawiając w drugim równaniu λ zamiast $\lambda + 2$ mamy powyżej równania identyczne z (3.5'ab), jeżeli tylko $AB = \lambda + 1$. Aby odwrotnie z równań (3.5'ab), otrzymać nasz układ (3.7ab), przepiszmy równanie (3.5'a) zastępując λ przez $\lambda + 2$.

$$\hat{H} \hat{H} \psi(\lambda + 2) = (\lambda + 1) \psi(\lambda + 2).$$

Działając na nie operatorem \hat{H} , otrzymujemy

$$\underset{\vee}{H} \hat{H} (\hat{H} \psi(\lambda + 2)) = (\lambda + 1) (\underset{\vee}{H} \psi(\lambda + 2)).$$

Porównując z równaniem (3.5'b) widzimy, że $\hat{H} \psi(\lambda + 2) = B \psi(\lambda)$. Podobnie postępując z równaniem (3.5'b) przy zastosowaniu \hat{H} , uzyskamy (3.7a).

Tak więc na mocy naszego twierdzenia możemy z równania (3.7a) otrzymać ze znanego $\psi(\lambda)$ inną funkcję $\psi(\lambda + 2)$, a z równania (3.7b) funkcję $\psi(\lambda - 2)$. Postępując dalej w ten sam sposób możemy ze znanych rozwiązań dla $\lambda = \pm 1$ otrzymać cały ciąg rozwiązań dla $\lambda = \pm 2N + 1$ ($N = 0, 1, 2, 3, \dots$). Ze względu na warunek całkowalności znaczenie fizyczne ma tylko ciąg rozwiązań (drabina) wychodzących z $\psi(1) = c \cdot e^{-\frac{\xi^2}{2}}$ dla $\lambda = 2N + 1$ ($N = 0, 1, 2, \dots$).

Z zasadniczych naszych wzorów:

$$\lambda = \frac{2E}{h\omega};$$

otrzymamy więc dla dopuszczalnych wartości energii

$$E_N = h\omega \left(N + \frac{1}{2} \right).$$

W dalszym ciągu będziemy stosować oznaczenie $\psi(\lambda) = \psi_N$ (gdy $\lambda = 2N + 1$).

Twierdzenie III: Podstawiamy do wzorów (3.7ab) $A = B = \sqrt{2(N+1)}$. Twierdzimy, że ψ_N będą znormalizowane jeśli tylko funkcja kluczowa ψ_0 będzie znormalizowana. To zaś będzie miało miejsce, gdy obierzemy $\psi_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. Twierdzenie nasze udowodnimy przez indukcję, tj. dowiedzimy, że ze znormalizowania ψ_N wynika znormalizowanie ψ_{N+1} .

Równania (3.7ab) możemy napisać teraz w postaci:

$$\hat{H} \psi_N = \sqrt{2(N+1)} \psi_{N+1}, \quad (3.7'a)$$

$$\hat{H} \psi_{N+1} = \sqrt{2(N+1)} \psi_N, \quad (3.7'b)$$

a więc

$$(\psi_N, \hat{H} \psi_{N+1}) = \sqrt{2(N+1)} (\psi_N, \psi_N)$$

czyli, ze względu na twierdzenie I i znormalizowanie funkcji ψ_N :

$$(\hat{H} \psi_N, \psi_{N+1}) = \sqrt{2(N+1)}.$$

Podstawiając (3. 7a) otrzymamy

$$\sqrt{2(N+1)}(\psi_{N+1}, \psi_{N+1}) = \sqrt{2(N+1)}$$

czyli

$$(\psi_{N+1}, \psi_{N+1}) = 1.$$

Dowód ortogonalności naszych funkcji przeprowadzimy w sposób następujący: mnożymy równanie (3. 5'a) z lewej strony przez $\psi_{N'}$ i całkujemy; z drugiej strony to samo równanie odniesione do funkcji $\psi_{N'}$:

$$\hat{H} H \psi_{N'} = 2 N' \psi_{N'},$$

mnożymy obustronnie z prawej strony przez funkcję ψ_N i całkujemy. Stosując do obu otrzymanych równań twierdzenie I mamy:

$$(H \psi_N, H \psi_{N'}) = 2 N' (\psi_N, \psi_{N'}),$$

$$(H \psi_N, H \psi_{N'}) = 2 N (\psi_N, \psi_{N'}).$$

Odejmując te równania od siebie otrzymujemy

$$(N - N') (\psi_N, \psi_{N'}) = 0, \text{ a więc dla } N \neq N' \text{ mamy } (\psi_N, \psi_{N'}) = 0.$$

Twierdzenie IV: Twierdzimy, że otrzymany powyżej ciąg rozwiązań całkowalnych dla $\lambda = 2N + 1$ (N całkowite nieujemne) jest jedynym ciągiem rozwiązań posiadającym fizyczne znaczenie.

Dowód przeprowadzimy niewprost — zakładając, że istnieje ciąg rozwiązań spełniających nasze warunki, rozpoczynający się od λ zawartego wewnątrz przedziału $(-1, +1)$. Widzimy, że taka drabina nie może się skończyć w żadnym kierunku, ponieważ prawe strony równań (3. 5'ab) są równe zeru tylko dla $\lambda = \pm 1$.

Mnożąc równanie (3. 5'a) przez $\psi(\lambda)$ i całkując, otrzymamy przy zastosowaniu twierdzenia I

$$(\psi(\lambda), \hat{H} H \psi(\lambda)) = (\lambda - 1) (\psi(\lambda), \psi(\lambda)),$$

czyli

$$(H \psi(\lambda), H \psi(\lambda)) = A^2 (\psi(\lambda - 2), \psi(\lambda - 2)) = (\lambda - 1) (\psi(\lambda), \psi(\lambda)).$$

Wyrażenie z lewej strony jest stale dodatnie jako całka z wielkości stale dodatniej, podobnie jak nawias $(\psi(\lambda), \psi(\lambda))$. Natomiast $(\lambda - 1)$ przy przejściu po drabinie musi, wobec naszych założeń, przy-

mować także wartości ujemne. A więc tego rodzaju drabina nieskończona w obie strony nie może być dobrą drabiną, ponieważ doszliśmy w tym wypadku do sprzeczności. Nasze założenie istnienia dobrej drabiny rozwiązań dla $\lambda \neq 2N + 1$ jest więc fałszywe.

W przeprowadzeniu dowodu tkwi jako ciche założenie konieczny warunek, by całkowalność w kwadracie funkcji $\psi(\lambda)$ pociągała za sobą całkowalność funkcji $\hat{H}\psi(\lambda)$ względnie $H\psi(\lambda)$. Szczegółowy dowód, że założenie to jest słuszne, podany jest w dodatku.

Dla otrzymania na drodze kwantowo-mechanicznej reguły wyboru dla przejść oscylatora między różnymi stanami energii musimy znać macierz operatora ξ w układzie określonym funkcjami własnymi ψ_N :

$$(\xi)_{NN'} = (\psi_N, \xi \psi_{N'}).$$

Z równań (3.6ab) dostajemy:

$$\begin{aligned} (\xi)_{NN'} &= (\psi_N, \xi \psi_{N'}) = \frac{1}{2} (\psi_N, \hat{H} \psi_{N'}) + \frac{1}{2} (\psi_N, H \psi_{N'}) = \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2(N'+1)} \delta_{N, N'+1} + \frac{1}{2} \sqrt{2N'} \delta_{N, N'-1}. \end{aligned}$$

Ostatniego przejścia dokonujemy na podstawie ortonormalności funkcji ψ_N .

Otrzymaliśmy w ten sposób macierz:

$$(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Obliczmy jeszcze macierz operatora $\pi = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{d\xi} = \frac{\hbar}{2i} (H - \hat{H})$:

$$\begin{aligned} (\pi)_{NN'} &= \frac{\hbar}{2i} (\psi_N, H \psi_{N'}) - \frac{\hbar}{2i} (\psi_N, \hat{H} \psi_{N'}) = \frac{\hbar}{2i} \sqrt{2N'} (\psi_N, \psi_{N'-1}) - \\ &- \frac{\hbar}{2i} \sqrt{2(N'+1)} (\psi_N, \psi_{N'+1}) = \frac{\hbar}{2i} \sqrt{2N'} \delta_{N, N'-1} - \frac{\hbar}{2i} \sqrt{2(N'+1)} \delta_{N, N'+1}. \end{aligned}$$

Stąd macierz (π) ma postać:

$$(\pi) = \frac{h}{i\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \dots \\ -\sqrt{1} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \dots \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{3} & 0 \dots \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 & \sqrt{4} \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Jak łatwo zauważyć, obie macierze są Hermitowskie.

Z warunku kwantowego $[\pi, \xi] = \pi \xi - \xi \pi = \frac{h}{i}$ otrzymamy po podstawieniu naszych operatorów

$$\frac{h}{4i} [H - \hat{H}, H + \hat{H}] = \frac{h}{2i} [\hat{H}, H] = \frac{h}{i},$$

stąd

$$[H, \hat{H}] = -[H, H] = 2. \quad (3.8)$$

Wyrażając operatory H i \hat{H} przez ξ i π :

$$\hat{H} \rightarrow \xi - \frac{i}{h} \pi, \quad H \rightarrow \xi + \frac{i}{h} \pi,$$

mamy odpowiadające im macierze:

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \sqrt{1} & 0 & 0 & 0 \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & 0 & 0 \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Operatory \hat{H} i H noszą odpowiednio nazwy operatorów tworzenia i niszczenia.

Problem powyższy można łatwo uogólnić na oscylator p -wymiarowy. Hamiltonian ma wtedy postać:

$$H = \sum_{s=1}^p \frac{p_s^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p k_s^2 q_s^2 = E.$$

Rozwiązanie równania Schrödingera

$$H\psi = E\psi$$

sprowadza się przez separację zmiennych do problemu 1-wymiarowego. Wielkościom ξ , E_N , \hat{H} , H , ψ odpowiadają teraz wielkości ξ_s , E_{Ns} , \hat{H}_s , H_s , ψ_{Ns} , przy warunkach:

$$E_N = \sum_{s=1}^F E_{Ns}; \quad \psi_N = \prod_{s=1}^F \psi_{Ns}(\xi_s).$$

4. Zastosowanie do najprostszych problemów kwantowania pola

W mechanice kwantowej rozwiązanie każdego zagadnienia zaczyna się od znalezienia Hamiltonianu. A więc dla oscylatora np. mamy Hamiltonian

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k^2 q^2,$$

gdzie p i q są teraz operatorami, które mają spełniać warunek kwantowy

$$[p, q] = \frac{\hbar}{i},$$

i podstawione jako macierze do Hamiltonianu mają dać macierz energii w postaci diagonalnej. Technika Schrödingera jest dlatego szczególnie dogodna, ponieważ właśnie daje H w postaci diagonalnej. W przeciwnym przypadku mamy bowiem do czynienia z trudnym problemem sprowadzenia macierzy na osie główne.

Rozważmy teraz proste równanie cząstkowe mezonu postaci:

$$-\frac{\ddot{\varphi}}{c^2} + \Delta \varphi = \mu^2 \varphi. \quad (4.1)$$

Gdy $\mu^2 = 0$ mamy najprostszą teorię światła (Fresnela) stosowaną często w optyce. Gdy $\mu^2 = 0$ i $\ddot{\varphi} = 0$, mamy jako rozwiązanie równania znanego z elektrostatyki funkcję $\varphi = \frac{e}{r}$. Jeśli $\mu \neq 0$, otrzy-

ujemy jako kulistosymetryczne rozwiązanie potencjał Yukawy $\varphi = \frac{e^{-\mu r}}{r}$. Równanie (4.1) jest jeszcze czysto klasyczne. Zadaniem teorii kwantowej pola jest odpowiedź na pytanie, jak kwantować równania pól klasycznych. Chodzi o to aby, naśladować przejście od klasycznej mechaniki punktów do mechaniki kwantowej, wziąć za punkt wyjścia tym razem klasyczną teorię pól i zastosować odpowiednie reguły przejścia do teorii kwantowej.

Przejście od Hamiltonianu klasycznego do równania Schrödingera

$$H\psi = E\psi$$

jest właściwie przejściem od obrazu cząstkowego do obrazu polowego. Naśladowując to przejście w zastosowaniu do pola zobaczymy, że teoria kwantowa pola zastępuje obraz polowy — kwantowym obrazem cząstkowym. To przejście od teorii pola klasycznego do obrazu kwantowego prowadzi nas do Hamiltonianu w postaci:

$$H = \frac{1}{2} \sum_k (p_k^* p_k + \omega_k^2 q_k^* q_k), \quad (4.2)$$

gdzie

$$k_s = \frac{2\pi n_s}{l}$$

są składowymi wektora pędu \vec{k} ($s = 1, 2, 3; N_s = 1, 2, 3 \dots$).

$$\omega^2 = \mu^2 + k^2$$

odpowiada energii; l jest to długość krawędzi kostki, w którą zamknęliśmy nasze pole, by otrzymać przeliczalną ilość stopni swobody.

Jak łatwo się przekonać, p_k^* i q_k^* muszą spełniać następujące warunki kwantowe (patrz Wentzel rozdz. 2 § 6):

$$[p_k^*, q_k^*] = \delta_{kk'}. \quad (4.3)$$

Z warunków Hermitowości wynikają poza tym zależności

$$q_k^* = q_{-k}; \quad p_k^* = p_{-k} \quad (4.4)$$

(gwiazdka oznacza przejście do macierzy stwarzyszzonej).

*) Wyprowadzenie to znajduje się w książce Wentzla „Einführung in die Quantentheorie der Wellenfelder“, str. 40.

Szukamy teraz takiego przedstawienia dla p_k^{\rightarrow} i q_k^{\rightarrow} , żeby powyższe relacje były spełnione oraz aby macierz H była diagonalną.

W tym celu podstawmy:

$$q_k^{\rightarrow} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{4\omega_k^{\rightarrow}}} (\hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_{-k}^{\rightarrow}), \quad p_k^{\rightarrow} \rightarrow i \sqrt{\frac{\hbar\omega_k^{\rightarrow}}{4}} (\hat{H}_k^{\rightarrow} - \hat{H}_{-k}^{\rightarrow}), \quad (4.5)$$

gdzie

$$\hat{H}_k^{\rightarrow} = \left(\overset{\wedge}{\xi}_k^{\rightarrow} - \frac{d}{d\overset{\wedge}{\xi}_k^{\rightarrow}} \right), \quad \hat{H}_{-k}^{\rightarrow} = \left(\overset{\wedge}{\xi}_k^{\rightarrow} + \frac{d}{d\overset{\wedge}{\xi}_k^{\rightarrow}} \right).$$

Tak określone p_k^{\rightarrow} i q_k^{\rightarrow} spełniają warunki kwantowania (4.3).

Widzimy, że przy tym wyborze operatorów także równania (4.4) będą spełnione, ponieważ i i $-i$ są ze sobą stowarzyszone.

Dla Hamiltonianu, podstawiając nasze operatory, znajdziemy wyrażenie:

$$\begin{aligned} H &= \frac{\hbar}{8} \sum_{\vec{k}} \omega_k^{\rightarrow} \{ (\hat{H}_{-k}^{\rightarrow} - \hat{H}_k^{\rightarrow}) (\hat{H}_{-k}^{\rightarrow} - \hat{H}_k^{\rightarrow}) + (\hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_{-k}^{\rightarrow}) (\hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_{-k}^{\rightarrow}) \} = \\ &= \frac{\hbar}{4} \sum_{\vec{k}} \omega_k^{\rightarrow} (\hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow}) \end{aligned}$$

(korzystamy tu z równości $\sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}_{-k}^{\rightarrow} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \hat{H}_k^{\rightarrow}$).

Stąd, przechodząc do równania Schrödingera:

$$\frac{\hbar}{4} \left[\sum_{\vec{k}} \omega_k^{\rightarrow} (\hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow}) \right] \psi = E \psi,$$

dostajemy po dokonaniu separacji na składniki przemienne ze sobą nieskończony układ równań

$$\frac{1}{2} (\hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow} + \hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow}) \psi_k^{\rightarrow} = \frac{2 E_k^{\rightarrow}}{\omega_k^{\rightarrow} \hbar} \psi_k^{\rightarrow}.$$

Korzystając ze związku (3.8) możemy to równanie przekształcić na

$$\hat{H}_k^{\rightarrow} \hat{H}_k^{\rightarrow} \psi_k^{\rightarrow} = \left(\frac{2 E_k^{\rightarrow}}{\omega_k^{\rightarrow} \hbar} - 1 \right) \psi_k^{\rightarrow} = (\lambda_k^{\rightarrow} - 1) \psi_k^{\rightarrow},$$

gdzie

$$\lambda_k^{\rightarrow} = \frac{2 E_k^{\rightarrow}}{\omega_k^{\rightarrow} \hbar}.$$

Ponieważ równanie to jest tego samego typu, co równanie oscylatora harmonicznego, więc nasz problem okazał się identyczny z problemem wielowymiarowego oscylatora. Transponując odpowiednio uzyskane poprzednio wyniki, możemy przedstawić całkowitą energię pola w postaci:

$$E = \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}} \left(N_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right).$$

Energia zerowa jest nieskończona, ale możemy tego uniknąć przez identyfikowanie energii w każdym wymiarze z $E' = \hbar \omega_{\vec{k}} N_{\vec{k}}$, co oznacza tylko przesunięcie poziomu zerowego, od którego liczymy $E_{\vec{k}}$. $N_{\vec{k}}$ możemy interpretować obrazowo jako liczbę mezonów o pędzie \vec{k} .

Wielkim sukcesem teorii jest sprowadzenie obrazu polowego do obrazu punktowego poprzez proces skwantowania pola.

Problem dwu lub więcej pól z uwzględnieniem ich wzajemnego oddziaływania jest jednym z najważniejszych w teorii pola. Rozważymy tu możliwie najprostszyp przypadk mezonów i nukleonów.

W celu uzyskania potrzebnego aparatu matematycznego uogólnimy jeszcze pojęcie oscylatora.

Wprowadzimy następujące operatory:

$$\hat{L} = \hat{H} + b, \quad \underset{v}{L} = \underset{v}{H} + b^*; \quad (4.10)$$

b traktujemy narazie jako dowolną liczbę zespoloną.

Równanie różniczkowe uogólnionego oscylatora będzie miało postać:

$$\hat{L} \underset{v}{L} \Phi = (\lambda - 1 + b b^*) \Phi = (\lambda' - 1) \Phi \quad (\text{gdzie } \lambda = \lambda' - b b^*); \quad (4.11a)$$

Φ nie jest jak poprzednio funkcją rzeczywistą, ale może przyjmować wartości zespolone.

Jak łatwo widzieć, \hat{L} i $\underset{v}{L}$ są stowarzyszone i spełniają warunek:

$$[\underset{v}{L}, \hat{L}] = 2 = -[\hat{L}, \underset{v}{L}].$$

Podstawiając stąd $\hat{L} \underset{v}{L} = \underset{v}{L} \hat{L} - 2$ do równania (4.11a) otrzymamy je w postaci:

$$L \underset{v}{\hat{L}} \Phi = (\lambda + 1 + b b^*) \Phi = (\lambda' + 1) \Phi. \quad (4.11b)$$

Wprowadzając analogicznie operatory $\underset{v}{\hat{M}}$ i $\underset{v}{M}$

$$\underset{v}{\hat{M}} = \underset{v}{\hat{H}} + b^*, \quad \underset{v}{M} = \underset{v}{H} + b$$

otrzymalibyśmy podobne równania dla funkcji sprzężonej Φ^* , które oczywiście nie wnoszą nic fizycznie nowego.

Wobec formalnego podobieństwa z równaniem zwyczajnego oscylatora nasze twierdzenia I—IV będą słuszne z drobnymi zmianami.

Twierdzenie I: $(\Phi, \underset{v}{\hat{L}} f) = (L \Phi, f)$, jeżeli tylko iloczyn $\Phi^* f$ znika w nieskończoności. (Dowód przebiega identycznie jak poprzednio).

Twierdzenie II: Opierając się na poprzednim twierdzeniu I i założeniu, że $b = \text{const}$, mamy znowu spełnione zależności:

$$\underset{v}{\hat{L}} \Phi(\lambda') = A_1 \Phi(\lambda' + 2),$$

i

$$\underset{v}{L} \Phi(\lambda') = B_1 \Phi(\lambda' - 2).$$

Podobnie jak poprzednio, mając daną funkcję kluczową dla jakiegos λ'_0 , możemy utworzyć drabinę rozwiązań dla $\lambda' = \lambda'_0 \pm 2N$ (gdzie $N = 1, 2, 3 \dots$). Drabina kończy się wtedy jedynie, gdy $\lambda' = \pm 1$. Dla $\lambda' = 1$ funkcją kluczową będzie

$$\Phi_1(1) = A e^{-\frac{\xi}{2} - b^* \xi}. \quad (4.12)$$

Wszystkie trzy pozostałe funkcje: $\Phi_2(1)$, $\Phi_{1,2}(-1)$ nie spełniają warunków fizycznych (nie są całkowalne w kwadracie). Rozwiązanie powyższe otrzymujemy jak poprzednio z równania różniczkowego pierwszego rzędu $\underset{v}{L} \Phi = 0$, czyli

$$\xi \Phi + \frac{d\Phi}{d\xi} + b^* \Phi = 0,$$

— a to wynika z podstawienia $\lambda' = 1$ do równania (4.11a)).

Twierdzenie III: Twierdzimy, że mając znormalizowaną funkcję kluczową $\Phi(\lambda'_0)$ otrzymamy na mocy twierdzenia II ciąg funkcji

$\Phi(\lambda' \pm 2N)$ znormalizowanych. Wychodząc z $\lambda' = 1$ wzory z twierdzenia II możemy przepisać w postaci:

$$\hat{L} \Phi_N = \sqrt{2(N+1)} \Phi_{N+1}, \quad (4.13a)$$

$$L \Phi_{N+1} = \sqrt{2(N+1)} \Phi_N. \quad (4.13b)$$

Dla dowodu mnożymy drugie równanie przez Φ_N^* i całkujemy po całej przestrzeni. Z zastosowania twierdzenia I otrzymamy:

$$\sqrt{2(N+1)}(\Phi_N, \Phi_N) = (\Phi_N, L \Phi_{N+1}) = (\hat{L} \Phi_N, \Phi_{N+1}) = \sqrt{2(N+1)}(\Phi_{N+1}, \Phi_{N+1})$$

stąd — z unormowania funkcji Φ_N — wynika unormowanie funkcji Φ_{N+1} .

W sposób analogiczny do poprzedniego dowodzimy, że rozwiązania dla różnych N są ortogonalne.

Twierdzenie IV: Sformułujemy je w postaci następującej: jeżeli $\lambda' + 2N$ nie przechodzi przez 1, to nasza drabina nie może być dobra.

Przypuśćmy, że istnieje dobra drabina rozpoczynająca się od λ' zawartego w przedziale $-1 < \lambda' < 1$. Widzimy, że taka drabina nie może się skończyć w żadnym kierunku, ponieważ prawa strona naszego równania (4.11a) lub (4.11b) równa się zeru tylko dla $\lambda' = 1$.

Mnożąc równanie (4.11a) przez $\Phi^*(\lambda')$ i przestawiając operator \hat{L} w myśl twierdzenia I otrzymujemy:

$$(\Phi(\lambda'), \hat{L} L \Phi(\lambda')) = (\lambda' - 1) (\Phi(\lambda'), \Phi(\lambda')),$$

czyli

$$(L \Phi(\lambda'), L \Phi(\lambda')) = (\lambda' - 1) (\Phi(\lambda'), \Phi(\lambda')).$$

Wyrażenie z lewej strony jest stale dodatnie, jako całka z funkcji stale dodatniej, podobnie jak $(\Phi(\lambda'), \Phi(\lambda'))$. Natomiast $\lambda' - 1$ musi przyjąć także wartości ujemne — a więc równość ta nie może być spełniona dla wszystkich λ' z rozważanej drabiny. Stąd widać, że nasze założenie o istnieniu dobrej drabiny rozwiązań dla $\lambda' \neq 2N + 1$ jest fałszywe.

Przejdźmy do znormalizowania naszej funkcji kluczowej $\Phi(1)$.

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(1) \Phi(1) d\xi = A_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2 - (b+b^*)\xi - \left(\frac{b+b^*}{2}\right)^2} d\xi \cdot e^{+\left(\frac{b+b^*}{2}\right)^2} = \\ &= A_0^2 e^{+\left(\frac{b+b^*}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\xi + \frac{b+b^*}{2}\right)^2} d\xi, \end{aligned}$$

stąd

$$A_0 = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(b+b^*)}{8}}$$

i ostatecznie

$$\Phi(1) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{(b+b^*)}{8}} e^{-\frac{\xi^2}{2} - b^*\xi}.$$

W związku z tym dwie uwagi: 1) b może być także funkcją czasu. Jeśli np. $b = 0$ dla $t = 0$, czyli mamy do czynienia z początkowo niezakłóconym oscylatorem, to dla $t' \neq 0$ funkcją stanu podstawowego będzie nasza funkcja $\Phi(1)$. 2) W powyższym rozumowaniu nic się nie zmieni, jeżeli b będzie operatorem przemianym z \hat{H} i H_v . Konieczność traktowania b jako operatora ma miejsce np. przy rozważaniu sił jądrowych bardziej skomplikowanych niż te, które są związane z istnieniem skalarnego i rzeczywistego pola mezonowego.

Dzięki zupełności układu funkcji stanu ψ_N dla niezakłóconego oscylatora możemy dowolną funkcję stanu zaburzonego oscylatora Φ rozwinąć na szereg:

$$\Phi = \sum_{N=0}^{\infty} c_N \psi_N,$$

gdzie c_N mogą być funkcjami czasu i $|c_N|^2$ daje prawdopodobieństwo znalezienia oscylatora w stanie N .

Zastosujemy powyższe uogólnienia do najprostszego skalarnego pola mezonowego z nukleonami. Dla prostoty założmy, że masa nukleonu w porównaniu z masą mezonu jest tak wielka, iż możemy przyjąć ją za równą nieskończoności. Uproszczenie to oznacza nieruchomość nukleonu. Niech $x_s^{(p)}$ ($s = 1, 2, 3$) oznaczają współrzędne położenia p -tego nukleonu, gdzie $p = 1, 2, 3 \dots n$. Hamiltonian całkowitego pola możemy napisać w postaci:

$$H = \overset{\circ}{H} + H',$$

gdzie $\overset{\circ}{H}$ jest Hamiltonianem niezakłóconego pola mezonowego, a H' — Hamiltonianem oddziaływania pola z nukleonami, który bierzemy kształtu:

$$H' = \sum_{\vec{k}} g c V^{-\frac{1}{2}} \sum_{p=1}^n e_s^{\sum i k_s x_s^{(p)}} q_{\vec{k}}^*,$$

gdzie g jest stałą charakteryzującą nukleony, $V = L^3$ — objętością kostki.

Podstawmy operatory kwantowe

$$q_{\vec{k}} \rightarrow \sqrt{\frac{\hbar}{4 \omega_{\vec{k}}}} (\hat{H}_{\vec{k}} + H_{\vec{v}-\vec{k}}), \quad p_{\vec{k}} \rightarrow i \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{4}} (H_{\vec{k}} - \hat{H}_{-\vec{k}}), \quad \vec{k} = (k_1, k_2, k_3).$$

Korzystając z zależności $\sum_{\vec{k}} H_{\vec{v}-\vec{k}} = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}}$ znajdziemy ostatecznie:

$$\overset{\circ}{H} = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{4} (\hat{H}_{\vec{k}} H_{\vec{v}\vec{k}} + H_{\vec{v}\vec{k}} \hat{H}_{\vec{k}}),$$

$$H' = \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{4} (\hat{H}_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^* + H_{\vec{v}\vec{k}} b_{\vec{k}}^*),$$

gdzie

$$b_{\vec{k}} = b_{-\vec{k}}^* = (\sqrt{\hbar \omega_{\vec{k}}})^{-1} g c V^{-\frac{1}{2}} \sum_p e^{-\sum i k_s x_s^{(p)}}.$$

Napiszmy równanie Schrödingera

$$(\overset{\circ}{H} + H') \Phi = E \Phi,$$

czyli, korzystając z operatorów L i \hat{L} wprowadzonych poprzednio:

$$\left\{ \sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} \left[\frac{1}{2} (\hat{L}_{\vec{k}} L_{\vec{v}\vec{k}} + L_{\vec{v}\vec{k}} \hat{L}_{\vec{k}}) - b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^* \right] \right\} \Phi = E \Phi.$$

*) Patrz Wentzel, op. cit. rozdział II, § 7.

Ponieważ komutator $[L, \overset{\Delta}{L}] = 2$, więc możemy to równanie przekształcić do postaci:

$$\left[\sum_{\vec{k}} \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2} (\overset{\Delta}{L}_{\vec{k}} \overset{\Delta}{L}_{\vec{k}'} + 1 - b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'}^*) \right] \Phi = E \Phi.$$

Korzystając z przemienności operatorów z różnymi k i k' , możemy dokonać separacji otrzymując równania

$$\overset{\Delta}{L}_{\vec{k}} \overset{\Delta}{L}_{\vec{k}'} \Phi = (\lambda_{\vec{k}} - 1 + b_{\vec{k}} b_{\vec{k}'}^*) \Phi.$$

Stosując naszą ogólną teorię mamy odrazu

$$E_{\vec{k}} = (2 N_{\vec{k}} + 1 - b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^*) \frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}.$$

By po zsumowaniu uniknąć wystąpienia nieskończonej energii zerowej skreślamy w każdym poszczególnym wymiarze $\frac{\hbar \omega_{\vec{k}}}{2}$ jako nieistotną stałą addytywną.

Rozważmy teraz znaczenie wyrazu $b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^*$.

$$b_{\vec{k}} = \sum_{(p)=1}^n b_{\vec{k}}^{(p)},$$

stąd

$$b_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^* = \sum_p b_{\vec{k}}^{(p)} b_{\vec{k}}^{(p)*} + \sum_{p \neq t} b_{\vec{k}}^{(p)} b_{\vec{k}}^{(t)*},$$

Znowu musimy skreślić wyraz $\sum_p b_{\vec{k}}^{(p)} b_{\vec{k}}^{(p)*}$ jako skończony w każdym wymiarze, co oznacza wyeliminowanie nieskończonej energii własnej nukleonów. Drugi wyraz daje nam energię wzajemnego oddziaływania między nukleonami. Jeśli więc założymy, że wszystkie $N_{\vec{k}}$ są równe zero, czyli gdy nie będzie mezonów w polu, to energia nie będzie równa zero, gdyż pozostanie energia wzajemnego oddziaływania nukleonów. Wykonując obliczenia dla dwóch nukleonów otrzymujemy w najniższym stanie kwantowym

$$\Delta E = \frac{g^2}{4\pi} \frac{e^{-\mu r_{12}}}{r_{12}} *),$$

*) patrz Wentzel, op. cit. II, § 7.

gdzie r_{12} jest odległością wzajemną obu nukleonów. Z tego wyrażenia wnioskujemy, że siły między nukleonami są siłami przyciągania malejącymi szybko ze wzrostem odległości.

Całkowita funkcja pola Φ da się przedstawić w postaci:

$$\Phi = \prod_k \Phi_{N_k \rightarrow}$$

Jeżeli $\Phi_{N_k \rightarrow}$ są znormalizowane, to i Φ jest znormalizowana, ponieważ

$$\left(\prod_k \Phi_{N_k}, \prod_{k'} \Phi_{N_{k'}} \right) = \prod_{k, k'} \delta_{N_k N_{k'}}.$$

W toku naszego postępowania otrzymaliśmy układ, w którym już nie H_0 a $H_0 + H'$ jest macierzą diagonalną, a funkcjami stanu są Φ_{N_k} a nie ψ_{N_k} .

$N_k \rightarrow$ utożsamialiśmy poprzednio z liczbą mezonów o pędzie k , dlatego, że energia całkowita pola wynosi

$$E = \sum_k N_k \rightarrow h \omega_k \rightarrow,$$

Utrzymując tę samą interpretację dla pola zakłóconego (tj. z nukleonami) mamy, że gdy wszystkie $N_k = 0$ nie ma w polu żadnych mezonów. Funkcję pola możemy jednak rozwinąć według funkcji niezakłóconego pola mezonowego ψ_N . Otrzymujemy

$$\Phi = \sum_N c_N \psi_N.$$

W ten sposób dostaliśmy jednak pewien rozkład prawdopodobieństwa, określony wyrażeniem $|c_N|^2$, dla występowania mezonów z różnymi pędami, dla których nie mamy odpowiednika w wyrażeniu na energię. Tego rodzaju mezony nazywamy wirtualnymi.

Różni autorowie rozwinęli teorię pól mezonowych bardziej skomplikowanych od powyższego. Skutkiem zupełnie analogicznego formalizmu pozwalają one na stosowania tej samej metody rozwiązania. Wszędzie jednak, poza najprostszym przypadkiem, b jest operatorem. Warunkiem stosowalności naszego formalizmu jest przemienność $b_k \rightarrow$ i $b_k \rightarrow^*$ z $H_k \rightarrow$ i $H_k \rightarrow$. Może się jednak zdarzyć, że $b_k \rightarrow$ i $b_k \rightarrow^*$ nie są przemienne między sobą, co jest nieraz powodem wielu trudności.

W tym przypadku nie można rozwiązać zagadnienia naszą metodą ściśle, a tylko z pewnym przybliżeniem.

5. Atom wodoru

Jako trzeci przykład rozpatrzmy elektron w atomie wodoru. Równanie Schrödingera dla tego problemu jest kształtu

$$\Delta \psi + \frac{2m}{h^2} [E - V(r)] \psi = 0.$$

Zwykłą drogą separacji kładąc $\psi = R(r) P(\theta) Q(\varphi)$ we współrzędnych kulistych uzyskujemy równanie dla $P(\theta)$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) - \frac{m^2 P}{\sin^2 \theta} + \lambda P = 0, \quad (5.1)$$

gdzie m, λ są stałymi separacji. Rozwiązanie, jako zależne od λ i m , oznaczamy przez P_λ^m . Warunek normalizacji brzmi

$$\int_0^\pi |P_\lambda^m|^2 \sin \theta d\theta = 1.$$

By sprowadzić równanie (5.1) do postaci Sturm-Liouville'a wprowadzamy gęstości kuliste stowarzyszone

$$Y_\lambda^m = (\sin \theta)^{\frac{1}{2}} P_\lambda^m.$$

Warunek normalizacji przyjmie teraz postać

$$\int_0^\pi |Y_\lambda^m|^2 d\theta = 1.$$

Po podstawieniu otrzymujemy równanie dla Y_λ^m :

$$Y'' - \frac{m^2 - \frac{1}{4}}{\sin^2 \theta} Y + \left(\lambda + \frac{1}{4} \right) Y = 0. \quad (5.2)$$

Równanie to możemy, tak jak poprzednio, zapisać na dwa różne sposoby:

$$H^{m+1} \underset{v}{\hat{H}^{m+1}} Y_{\lambda}^m = [\lambda - m(m+1)] Y_{\lambda}^m, \quad (5.3a)$$

$$\hat{H}^m H^m Y_{\lambda}^m = [\lambda - m(m-1)] Y_{\lambda}^m. \quad (5.3b)$$

Przy tym

$$\hat{H}^{m+1} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \text{ctg } \Theta - \frac{d}{d\Theta} \quad (5.4a)$$

i

$$H^{m+1} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \text{ctg } \Theta + \frac{d}{d\Theta}. \quad (5.4b)$$

Operatory \hat{H}^m i H^m przyjmujemy jako dane. Istnieje jednak ogólna metoda obliczania tych operatorów przy danym $r(x, m)$ i λ . Metodę tę podamy w ogólnym przeglądzie wyników w § 7.

Podstawiając do równań (5.3ab) nasze operatory, wyrażone wzorami (5.4ab) możemy sprawdzić, że każde z równań (5.3ab) jest równoważne z naszym pierwotnym równaniem (5.2).

Twierdzenie I: $(\varphi, \hat{H}^m f) = (H^m \varphi, f)$ jeżeli tylko iloczyn $\varphi^* f$ znika w nieskończoności. Dowód przebiega identycznie jak w przypadku oscylatora.

Twierdzenie II: Którekolwiek z naszych równań drugiego rzędu (5.3ab) możemy zamienić na następujący układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m = A_{m+1} Y_{\lambda}^{m+1} \quad (5.5a)$$

i

$$\underset{v}{H}^{m+1} Y_{\lambda}^{m+1} = B_{m+1} Y_{\lambda}^m. \quad (5.5b)$$

Z powyższego układu równań (5.5ab) wynikają przez obustronne zastosowanie operatora H^{m+1} do równania (5.5a), lub \hat{H}^{m+1} do równania (5.5b), równania (5.3ab), jeżeli tylko $A_{m+1} B_{m+1} = \lambda - m(m+1)$. Mamy bowiem:

$$\underset{v}{H}^{m+1} \hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m = A_{m+1} \underset{v}{H}^{m+1} Y_{\lambda}^{m+1} = A_{m+1} B_{m+1} Y_{\lambda}^m$$

$$\hat{H}^m \underset{v}{H}^{m+1} Y_{\lambda}^{m+1} = B_{m+1} \hat{H}^m \underset{v}{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m = A_{m+1} B_{m+1} Y_{\lambda}^m.$$

Aby odwrotnie z równań (5. 3ab) otrzymać nasz układ (5. 5ab), działamy na równanie (5. 3a) operatorem \hat{H}^{m+1} . Otrzymujemy:

$$\hat{H}^{m+1} (H^{m+1} \hat{H}^{m+1}) Y_{\lambda}^m = [\lambda - m(m+1)] \hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m,$$

czyli

$$\hat{H}^{m'} H^{m'} [H^{m+1} Y_{\lambda}^m] = [\lambda - m(m'-1)] [\hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m],$$

gdzie

$$m' = m + 1.$$

Porównując otrzymane równanie z równaniem (5. 3b) widzimy że $\hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m = B_{m+1} Y_{\lambda}^{m+1}$. Podobnie postępując z równaniem (5. 3b) przy zastosowaniu \hat{H} uzyskamy (5. 5b). Ze względu na normalizację przyjmujemy $A_{m+1} = B_{m+1} = \sqrt{\lambda - m'(m+1)}$.

Posuwamy się tu po drabinie m -ów. Można by także analogicznie utworzyć drabiny ze względu na λ , jak to uczynił Schrödinger, ale nie otrzymalibyśmy funkcji znormalizowanych.

Położmy $\lambda = l(l+1)$, gdzie $l = 0, 1, 2, 3 \dots$. Dla dowolnego l , jeżeli $m = l$, prawa strona równań (5. 3a) znika, a więc otrzymamy z równania (5. 3a)

$$\hat{H}^{l+1} Y_l^l = 0,$$

czyli

$$\left[\left(l + \frac{1}{2} \right) \text{ctg } \Theta - \frac{d}{d\Theta} \right] Y_l^l = 0;$$

obliczając całkę mamy

$$Y_l^l = A_1 (\sin \Theta)^{l+\frac{1}{2}}.$$

Chcemy otrzymać teraz znormalizowaną drabinę funkcji własnych. Posługując się równaniami (5. 5ab) otrzymamy

$$\hat{H}^{m+1} Y_{\lambda}^m = \sqrt{L(l+1) - L(m+1)} Y_{\lambda}^{m+1},$$

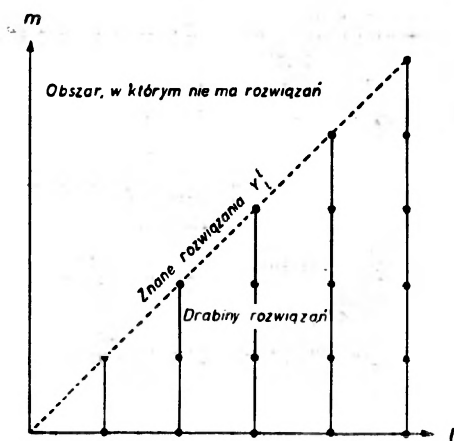
$$H^{m+1} Y_{\lambda}^{m+1} = \sqrt{L(l+1) - L(m+1)} Y_{\lambda}^m,$$

gdzie $L(l+1) = l(l+1)$.

Twierdzenie III: Wszystkie funkcje Y_l^m otrzymane w ten sposób będą znormalizowane, jeżeli znormalizujemy Y_l^l . Widzimy, że nasze drabiny nie mogą pójść w górę powyżej Y_l^l , tj. m nie może być większe od l , gdyż lewa strona równania (5.5a) równa jest zeru dla $m = l$.

Normalizując funkcję kluczową w zwykły sposób otrzymujemy:

$$Y_l^l = \sqrt{\frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2l+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2l}} (\sin \theta)^{l+\frac{1}{2}}.$$



Rys. 2

Twierdzenie IV:

Ponieważ wiemy z równania różniczkowego dla $\Phi(\varphi)$, że m przebiega wartości całkowite, więc mamy wobec tego do udowodnienia, że nie ma całkowalnych w kwadracie rozwiązań dla $\lambda \neq l(l+1)$. Widać bowiem, że wtedy drabina funkcji Y_λ^m nie kończy się. Twierdzimy, że drabina taka nie może być dobrą drabiną. Załóżmy bowiem, że istnieje ciąg całkowalnych funkcji rozpoczynających się od $\lambda \neq l(l+1)$ ($l = 0, 1, 2, \dots$). Mnożąc równanie

$$\overset{\Lambda}{H^{m+1}} \underset{\nu}{H^{m+1}} Y_\lambda^m = [\lambda - m(m+1)] Y_\lambda^m$$

przez $(Y_\lambda^m)^*$ i całkując, otrzymamy

$$(Y_\lambda^m, \overset{\Delta}{H}{}^{m+1} \underset{\nabla}{H}{}^{m+1} Y_\lambda^m) = (H^{m+1} Y_\lambda^m, \overset{\Delta}{H}{}^{m+1} \underset{\nabla}{H}{}^{m+1} Y_\lambda^m) = [\lambda - m(m+1)](Y_\lambda^m, Y_\lambda^m).$$

I znowu, przy tych samych zastrzeżeniach jak i w poprzednich przypadkach, mamy wyrażenia w nawiasach większe od zera, podczas gdy $[\lambda - m(m+1)]$ przy przejściu wzdłuż drabiny przyjmuje także wartości ujemne. A więc nasze założenie, jako prowadzące do sprzeczności, jest fałszywe.

Uogólnienie: Powyższe rozważania można łatwo uogólnić stosując je do równania postaci:

$$(5.6) \quad u'' - \frac{(m+\gamma)(m+\gamma-1)}{\sin^2 x} u + (\lambda + \gamma^2) u = 0$$

(dla naszego poprzedniego przypadku było $\gamma = \frac{1}{2}$).

Operatory $\overset{\Delta}{H}{}^{m+1}$ i $\underset{\nabla}{H}{}^{m+1}$ przyjmą teraz postać:

$$\overset{\Delta}{H}{}^{m+1} = (m+\gamma) \operatorname{ctg} x - \frac{d}{dx},$$

$$\underset{\nabla}{H}{}^{m+1} = (m+\gamma) \operatorname{ctg} x + \frac{d}{dx};$$

poza tym

$$L(m+1) = m(m+2\gamma); \lambda_l = l(l+2\gamma); u_l^l(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \frac{\Gamma(l+\gamma+1)}{\Gamma(l+\gamma+\frac{1}{2})} \cdot (\sin x)^{l+\gamma}.$$

Przejdźmy teraz do rozpatrzenia funkcji radialnej problemu elektronu w polu Coulombowskim. Dla części radialnej otrzymujemy po separacji równanie

$$\psi'' + \frac{2}{x} \psi' - \frac{l(l+1)}{x^2} \psi + \lambda \psi = 0,$$

gdzie

$$\lambda = \frac{2h^2}{\mu Ze^4} E, \quad x = \frac{\mu Ze^2}{h^2} r,$$

i gdzie ψ ma spełniać warunek normalizacji $\int_0^\infty \psi^2 x^2 dx = 1$.

By sprowadzić nasze równanie do postaci (1, 1) kładziemy

$$R = x\psi,$$

stąd

$$R'' + \frac{2}{x} R' - \frac{l(l+1)}{x^2} R + \lambda R = 0. \quad (5.7)$$

Stosując nasz ogólny sposób postępowania można równanie (5.7) napisać w dwóch formach:

$$\hat{H}{}^{l+1} \overset{\vee}{H}{}^{l+1} R'_\lambda = [\lambda - L(l+1)] R'_\lambda, \quad (5.8a)$$

$$\overset{\vee}{H}{}^l \overset{\vee}{H}{}^l R'_\lambda = [\lambda - L(l)] R'_\lambda, \quad (5.8b)$$

gdzie

$$L(l+1) = -\frac{1}{(l+1)^2}, \quad \lambda_n = -\frac{1}{(n+1)^2},$$

a operatory nasze wyrażą się wzorami:

$$\hat{H}{}^{l+1} = \frac{l+1}{x} - \frac{1}{l+1} - \frac{d}{dx}, \quad (5.9a)$$

$$\overset{\vee}{H}{}^{l+1} = \frac{l+1}{x} - \frac{1}{l+1} + \frac{d}{dx}. \quad (5.9b)$$

Jak łatwo sprawdzić, po podstawieniu tych operatorów do równań (5.8ab) otrzymamy istotnie równanie (5.7).

Twierdzenie I: $(\varphi, \overset{\vee}{H}f) = (\overset{\vee}{H}\varphi, f)$ jeżeli tylko iloczyn $\varphi^* f$ znika w nieskończoności. Dowód przebiega identycznie jak w poprzednich przypadkach.

Twierdzenie II: Którekolwiek z równań różniczkowych drugiego rzędu (5.8) możemy zamienić na układ równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\hat{H}{}^{l+1} R'_n = \sqrt{L(n+1) - L(l+1)} R'_n \quad (5.10a)$$

i

$$\overset{\vee}{H}{}^{l+1} R'_n = \sqrt{L(n+1) - L(l+1)} R'_n. \quad (5.10b)$$

Dowód przebiega znowu identycznie jak poprzednio.

Twierdzenie III: Jeżeli znormalizujemy funkcję kluczową, wszystkie funkcje R_n^l otrzymane za pomocą równań (5.10ab) z funkcji kluczowej R_n^n będą znormalizowane.

Nasza funkcja kluczowa otrzymana, tak jak poprzednio przez przyrównanie do zera prawej strony równania (5.8a) będzie postaci:

$$R_n^n = \left(\frac{2}{n+1}\right)^{n+1} \frac{1}{(n+1) [(2n+1)!]^2} x^{n+1} e^{-\frac{x}{n+1}}.$$

Widzimy stąd, że od funkcji kluczowej możemy iść tylko w dół po naszej drabinie l-ów.

Twierdzenie IV: Twierdzimy, że nie może istnieć żadna dobra drabina dla $\lambda_n \neq -\frac{1}{(n+1)^2}$. Dla $\lambda < 0$ dowód jednoznaczności jest taki jak poprzednio; dla $\lambda > 0$ otrzymamy widmo ciągłe posiadające funkcje własne niecałkowalne. Dla widma ciągłego pozostanie słuszne tylko twierdzenie II. Tak więc metoda ta zawodzi w przypadku widma ciągłego. Można by w zasadzie rozwiązać równanie (5.8ab) dla $\lambda > 0$, co jest jednak dość trudne, i stosując do niego twierdzenie II szukać dalszych rozwiązań. Można jednak zamienić widmo ciągłe na widmo nieciągłe za pomocą pewnego chwytu, który nie zmieniając prawie fizycznych warunków umożliwi matematyczne rozwiązanie problemu takie, jak w obszarze widma nieciągłego. Sposób ten polega na zamknięciu atomu w kuli o dostatecznie wielkim promieniu przy założeniu odpowiednich warunków na jej brzegu. Widmo otrzymane tą drogą składać się będzie (w obszarze, w którym przed tym było ciągłe) z bardzo gęstego ciągu linii, których odstęp zależy od wielkości promienia kuli ϱ .

Zakładamy według powyższego, że metryka skończonej przestrzeni sferycznej jest określona wzorem:

$$dR^2 + \varrho^2 \sin^2 \left(\frac{R}{\varrho}\right) (d\Theta^2 + \sin^2 \Theta d\varphi^2) = \varrho^2 dx^2 + \varrho^2 \sin^2 x (d^2 \Theta + \sin^2 \Theta d\varphi^2),$$

gdzie $x = \frac{R}{\varrho}$; ϱ jest promieniem kuli granicznej.

Potencjał Coulombowski V w tej przestrzeni wyraża się funkcją

$$V = -\frac{Ze^2}{\varrho} (\text{ctg } x),$$

ponieważ V jest funkcją harmoniczną w naszej przestrzeni sferycznej, tj. spełnia równanie

$$\frac{d}{dx} \left(\sin^2 x \frac{dV}{dx} \right) = 0.$$

Podstawiając to do równania Schrödingera

$$\Delta \psi + \frac{2m}{h^2} (E - V) \psi = 0,$$

i wyrażając ψ jako iloczyn zwykłych funkcji kulistych i funkcji radialnej $\sigma(x)$.

$$\psi = \sigma(x) P(\Theta) Q(\varphi),$$

otrzymamy dla $\sigma(x)$ równanie

$$\frac{d}{dx} \left(\sin^2 x \frac{d\sigma}{dx} \right) + (2\nu \sin x \cos x) \sigma - m(m+1)\sigma + \lambda \sin^2 x \cdot \sigma = 0, \quad (5.11)$$

gdzie

$$\nu = \frac{\mu}{h^2} \rho Z e^2; \quad \lambda = \frac{2\mu}{h^2} E \rho^2.$$

Transformacja $S = \sin x \cdot \sigma$ przeprowadza równanie (5.11) do szukanego kształtu

$$S'' + (2\nu \operatorname{ctg} x) S - \frac{m(m+1)}{\sin^2 x} S + (\lambda + 1) S = \sigma. \quad (5.12)$$

Dla $\nu = 0$ równanie (5.12) przechodzi w równanie typu (4.8) przy $\gamma = 1$.

Faktoryzacja równania (5.12) daje nam

$$\begin{aligned} & \left\{ (m+1) \operatorname{ctg} x - \frac{\nu}{m+1} + \frac{d}{dx} \right\} \left\{ (m+1) \operatorname{ctg} x - \frac{\nu}{m+1} - \frac{d}{dx} \right\} S_\lambda^m = \\ & = \hat{H}^n \underset{\nu}{H}^m S_\lambda^m = [\lambda - L(m+1)] S_\lambda^m = \underset{\nu}{H}^{m+1} \hat{H}^{m+1} S_\lambda^m = [\lambda - L(m)] S_\lambda^m, \end{aligned} \quad (5.13a)$$

gdzie

$$L(m+1) = m(m+2) + \frac{\nu^2}{(m+1)^2}. \quad (5.13b)$$

Całkowalne rozwiązanie znikające na końcach przedziału $(0, \pi)$ istnieje, jeśli

$$\lambda_l = L(l+1) = \frac{2\mu\varrho^2}{h^2} E_l,$$

stąd

$$E_l = \frac{l(l+2)h^2}{2\mu\varrho^2} - \frac{Z^2 e^4 \mu}{2h^2(l+1)^2}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób widmo nieciągłe, które dla niewielkich l i rosnącego ϱ dąży do zwykłego wzoru Bohra, a dla bardzo dużych l daje nam bardzo gęste widmo odpowiadające swobodnej cząstce.

Rozwiązując równania (5.13ab) dla $l = m$ otrzymujemy funkcję kluczową w postaci:

$$S_l' = a \sin^{l+1} x \cdot e^{-\frac{x}{l+1}}.$$

Uogólnienie: Podobnie, jak w przypadku funkcji kulistych, możemy łatwo uogólnić powyższe rozważania, biorąc równanie pierwotne kształtu

$$f'' + \frac{2a}{x} f - \frac{(l+\gamma)(l+\gamma-1)}{x^2} f + \lambda f = 0. \quad (5.14)$$

Postępując analogicznie jak poprzednio otrzymamy równania postaci identycznej z (5.8ab) z tym, że operatory \hat{H} , $\overset{\vee}{H}$ będą dane następującymi wzorami:

$$\hat{H}^{l+1} = \frac{l+\gamma}{x} - \frac{a}{l+\gamma} - \frac{d}{dx}, \quad (5.15a)$$

$$\overset{\vee}{H}^{l+1} = \frac{l+\gamma}{x} - \frac{a}{l+\gamma} + \frac{d}{dx}, \quad (5.15b)$$

i gdzie

$$L(l+1) = \frac{a^2}{(l+\gamma)^2} \quad \text{i} \quad \lambda_n = L(n) = \frac{a^2}{(n+\gamma)^2}.$$

Funkcja kluczowa będzie równa

$$f_{n\gamma}^n = A x^{n+\gamma} \cdot e^{-\frac{xa}{n+\gamma}}.$$

W szczególnym przypadku dla $l = 0$ będziemy mieli dwa równania rekurencyjne:

$$\left(\frac{\gamma}{x} - \frac{a}{\gamma} + \frac{d}{dx}\right) f_{n,\gamma}^1 = A f_{n,\gamma}^0, \quad (5.16a)$$

$$\left(\frac{\gamma}{x} - \frac{a}{\gamma} - \frac{d}{dx}\right) f_{n,\gamma}^0 = B f_{n,\gamma}^1. \quad (5.16b)$$

Przyjmujemy jak zwykle

$$A \cdot B = \frac{\tilde{a}^2}{\gamma^2} - \frac{a^2}{(n+\gamma)^2}.$$

Funkcje $f_{n,\gamma}^n$ są rozwiązaniami radialnych równań Diraca dla $\gamma^2 = (k^2 - \alpha^2 Z^2)$, gdzie $\alpha = \frac{e^2}{hc}$.

6. Problem Keplera na podstawie równań Diraca

Przejdźmy do zastosowania powyższego uogólnienia do problemu Keplera na gruncie równań Diraca. Dla funkcji radialnych otrzymujemy tu następujące równania różniczkowe

$$\frac{d\chi_1}{dr} - K \frac{\chi_1}{r} = \frac{\mu c}{h} \left(1 - \frac{E}{E_0} - \alpha \frac{Z}{r}\right) \chi_2, \quad (6.1b)$$

$$\frac{d\chi_2}{dr} + K \frac{\chi_2}{r} = \frac{\mu c}{h} \left(1 + \frac{E}{E_0} + \alpha \frac{Z}{r}\right) \chi_1, \quad (6.1a)$$

gdzie $\alpha = \frac{e^2}{hc}$, K jest liczbą całkowitą dodatnią $= 1, 2, 3, \dots$, E_0 — jest energią spoczynkową. Wprowadzamy następujące skróty:

$$\gamma_1 = (K - \alpha Z)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_2 = (K + \alpha Z)^{\frac{1}{2}}, \quad \gamma_1 \gamma_2 = (K^2 - \alpha^2 Z^2)^{\frac{1}{2}} = \gamma, \quad \varepsilon = \frac{E}{E_0}$$

i zastępujemy funkcje χ_1, χ_2 przez φ_1, φ_2 określone za pomocą wzorów

$$\varphi_1 = \gamma_1 (\chi_1 + \chi_2) \quad \varphi_2 = \gamma_2 (\chi_1 - \chi_2).$$

W rezultacie otrzymujemy równania:

$$\varphi_1' - b \varphi_1 = \left(\frac{\gamma}{r} + \varepsilon \frac{b \gamma_1}{\gamma_2}\right) \varphi_2 \quad (6.2a)$$

$$i \quad \varphi'_2 + b \varphi_2 = \left(\frac{\gamma}{r} - \varepsilon \frac{b\gamma_2}{\gamma_1} \right) \varphi_1. \quad (6.2b)$$

Teraz, zamieniając φ_1 , φ_2 na ψ_1 , ψ_2 określone wzorami

$$\psi_1 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$i \quad \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2.$$

otrzymamy przez dodanie do siebie względnie odjęcie równań (6.2ab) układ następujący:

$$\left(\frac{\gamma}{r} - \frac{a}{\gamma} - \frac{d}{dr} \right) \psi_1 = b \left(\frac{\varepsilon K}{\gamma} - 1 \right) \psi_2 \quad (6.3a)$$

$$i \quad \left(\frac{\gamma r}{r} - \frac{a}{\gamma} + \frac{d}{dr} \right) \psi_2 = b \left(\frac{\varepsilon K}{\gamma} + 1 \right) \psi_1. \quad (6.3b)$$

Jak widać przez porównanie z (5.16ab), równania te będą spełnione, gdy za ψ_1 weźmiemy $f_{n,\gamma}^0$ a za ψ_2 — $f_{n,\gamma}^1$, oraz gdy spełniony jest warunek:

$$b^2 \left(\frac{\varepsilon^2 K^2}{\gamma^2} - 1 \right) = A \cdot B = \frac{a^2}{\gamma^2} - \frac{a^2}{(n+\gamma)^2} = \varepsilon^2 a^2 Z^2 b^2 \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{(n+\gamma)^2} \right).$$

Ponieważ

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0},$$

więc po rozwiązaniu względem ε otrzymamy

$$E = E_0 \left(1 + \frac{a^2 Z^2}{(n+\gamma)^2} \right).$$

Znaleźliśmy więc znany wzór Sommerfelda na energię elektronu wodoru.

Funkcje $\psi_1 = f_{n,\gamma}^0$ i $\psi_2 = f_{n,\gamma}^1$ możemy obliczyć za pomocą zwykłych wzorów rekurencyjnych, gdy tylko znamy $f_{n,\gamma}^n$, przez n - lub $n-1$ -krotne zastosowanie operatora H^{l+1} .

7. Zebranie wyników

Chcąc zastosować metodę faktoryzacji do równania różniczkowego drugiego rzędu

$$\frac{d}{d\theta} \left(p \frac{dY}{d\theta} \right) + q Y + \lambda \rho Y = 0 \quad (7.1)$$

(gdzie p i q są funkcjami Θ), musimy to równanie za pomocą transformacji zmiennych sprowadzić do równania typu:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + r(x, m) y + \lambda y = 0. \quad (7.2)$$

Powyższe przejście da się wykonać przy pomocy podstawienia

$$y = (p q)^{\frac{1}{4}} Y \quad \text{i} \quad x = \int_0^{\Theta} \left(\frac{q}{p} \right)^{\frac{1}{2}} d\Theta,$$

jeżeli tylko funkcje p i q są nieujemne, oraz istnieje iloraz $\frac{q}{p}$ wszędzie w rozważanym przedziale.

Po tym wstępnym kroku pozostaje nadal otwarte pytanie, czy dane równanie da się zfaktoryzować, to znaczy, czy równanie (7.2) da się przedstawić w dwu postaciach:

$$H^{m+1} \hat{H}{}^{m+1} y_{\lambda}^m = (\lambda - L(m+1)) y_{\lambda}^m \quad (7.3a)$$

$$H^m \hat{H}{}^m y_{\lambda}^m = (\lambda - L(m)) y_{\lambda}^m, \quad (7.3b)$$

gdzie

$$\hat{H}{}^m = k(x, m) - \frac{d}{dx} \quad (7.4a)$$

i

$$\hat{H}{}^m = k(x, m) + \frac{d}{dx}. \quad (7.4b)$$

Oczywiście zależy to od kształtu $r(x, m)$. Porównując bowiem równania (7.3a) i (7.3b) wypisane *explicite* z równaniem pierwotnym (7.2) znajdziemy, że funkcje k i L muszą spełniać następujące zależności:

$$k^2(x, m+1) + \frac{d}{dx} k(x, m+1) + L(m+1) = -r(x, m)$$

i

$$k^2(x, m) - \frac{d}{dx} k(x, m) + L(m) = -r(x, m).$$

Podstawiając w pierwszym równaniu m za $m+1$ otrzymamy ostatecznie

$$k(x, m) = \frac{\frac{d}{dx} [r(x, m-1) + r(x, m)]}{2 [r(x, m-1) - r(x, m)]}$$

$$i \quad L(m) = -\frac{1}{2} [r(x, m-1) + r(x, m)] - k^2(x, m). \quad (7.6)$$

Dla dowolnej funkcji $r(x, m)$ możemy więc znaleźć $k(x, m)$, ale faktoryzacja będzie możliwa jedynie wtedy, gdy prawa strona wyrażenia (7.6) jest niezależna od x , co narzuca od razu pewne warunki konieczne dla $r(x, m)$. Wychodząc z tego warunku można łatwo znaleźć możliwe postaci funkcji $r(x, m)$, dla których równanie (7.2) daje się zfaktoryzować. Jeśli założymy, że $k(x, m)$ ma się dać przedstawić w postaci szeregu potęgowego względem m , to okaże się, że tylko kilka funkcji $r(x, m)$ jest możliwych. Przypadki te wraz z przyporządkowanymi k i L są zestawione w poniższej tabelce:

	$r(x, m)$	$k(x, m)$	$L(m+1)$
1	$-x^2 - 2m$	$-x$	$2m+1$
2	$\frac{1}{4} - m^2$ $\frac{\quad}{\sin^2 x} + \frac{1}{4}$	$\left(m - \frac{1}{2}\right) \operatorname{ctg} x$	$m(m+1)$
3	$\frac{2}{x} - \frac{m(m+1)}{x^2}$	$\frac{m}{x} - \frac{1}{m}$	$-\frac{1}{(m+1)^2}$
4	$2v \operatorname{ctg} x -$ $\frac{m(m+1)}{x^2}$	$m \operatorname{ctg} x - \frac{v}{m}$	$m(m+2) -$ $\frac{v^2}{(m+1)^2}$
5	$\frac{1}{4} - (\alpha+m)^2$ $\frac{\quad}{\sin^2 x} +$ $\frac{1}{4} - (\beta+m)^2$ $+$ $\frac{\quad}{\cos^2 x}$	$\left(\alpha - \frac{1}{2} + m\right) \operatorname{ctg} x -$ $-\left(\beta - \frac{1}{2} + m\right) \operatorname{tg} x$	$(\alpha + \beta + 2m + 1)^2$
6	$\frac{\left(m^2 - \frac{1}{4}\right)}{-x^2}$	$\frac{m - \frac{1}{2}}{x}$	0

Funkcje $r(x, m)$ tu podane dają szereg bardzo ważnych równań mechaniki kwantowej. Oczywiście rozszerzając nasze założenia co do postaci $k(x, m)$ dałoby się ten szereg znacznie powiększyć. Zostało to zresztą w pewnej mierze już zrobione. Dla naszych zastosowań znacznie ważniejsze są jednak inne sposoby rozszerzenia stosowalności metody faktoryzacji. Są to tzw. faktoryzacje sztuczne. Tak więc, jeżeli po dodaniu do $r(x, m)$ pewnej funkcji zależnej od m otrzymamy $r_0(x, m) = r(x, m) + f(m)$ dające się zaszeregować pod któryś z typów naszej tabeli, to równanie się nie zmieni, jeśli będziemy zamiast (7.2) rozpatrywać

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + r_0(x, m) + \lambda' y = 0,$$

gdzie

$$\lambda' = \lambda - f(m).$$

Inne możliwości mamy wtedy, gdy możemy wprowadzić funkcję $r_0(x, m, \mu)$, która należy do standartowych typów, jeśli będziemy traktowali μ jako parametr oraz jeśli będzie spełniona zależność

$$r_0(x, m, \mu) = r(x, m).$$

Dla równania

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + r_0(x, m, \mu) y + \lambda y = 0$$

otrzymamy teraz zależność rozwiązania $y_l^n(\mu)$ jeszcze od parametru μ , tak że pożądanymi rozwiązaniami będą funkcje $y_l^n(m)$.

Inną jeszcze możliwością jest, że $r(x, m) = r_0(x, \varrho)$ czyli że pożądanym rozwiązaniem jest rozwiązaniem bardziej ogólnego równania z $r_0(x, m')$ dla specjalnej wartości $m' = \varrho$ (np. wyżej przytoczone rozwiązanie równań D i r a c a).

Oprócz tego rodzaju rozszerzenia zakresu stosowalności metody faktoryzacji na drodze ścisłej możemy rozwiązywać wiele równań drogą przybliżoną, metodami rachunku perturbacyjnego. Dokoła każdego z wyżej wymienionych czystych typów istnieje więc plejada pokrewnych równań, rozwiązalnych w przybliżeniu. Sposób traktowania takich przypadków podamy na przykładzie zjawiska S t a r k a.

8. Zastosowanie metody faktoryzacji do rachunku perturbacji

Dla problemu niezakłóconego mamy znane nam równanie:

$$y'' + \overset{\circ}{r}_l y + \overset{\circ}{\lambda} y = 0.$$

Gdy znajdziemy odpowiednie funkcje k_l^0 i L_l^0 , możemy znaleźć równania faktoryzacyjne. Uzyskujemy w dalszym ciągu dobre drabiny rozwiązań dla tego przypadku. Gdy występuje zakłócenie, którego wielkość zależy liniowo od parametru ε , możemy w pierwszym przybliżeniu napisać

$$r = \overset{\circ}{r} + \varepsilon r^1, \quad \lambda = \overset{\circ}{\lambda} + \varepsilon \lambda^1, \quad k = k^0 + \varepsilon k^1, \quad L = L^0 + \varepsilon L^1. \quad (8.1)$$

Wszędzie w tych rozważaniach opuścimy wyrazy wyższych stopni względem parametru ε jako małe wyższych rzędów.

Mając dane r^1 chcemy znaleźć k^1 i L^1 opierając się na znanym rozwiązaniu problemu niezakłóconego. Nasze operatory wyrażają się teraz wzorami:

$$\hat{H}^l = k_l - \frac{d}{dx}$$

i

$$\underset{v}{H}^l = k_l + \frac{d}{dx}.$$

Równania problemu można napisać w dwóch postaciach:

$$\underset{v}{H}^{l+1} \hat{H}^{l+1} y_\lambda^l = [\lambda - L(l+1)] y_\lambda^l, \quad (8.2a)$$

$$\hat{H}^{l+1} \underset{v}{H}^{l+1} y_\lambda^l = [\lambda - L(l+1)] y_\lambda^l. \quad (8.2b)$$

Postępując normalną drogą otrzymamy równania pierwszego rzędu pozwalające na tworzenie nowych funkcji:

$$\underset{v}{H}^{l+1} y_n^{l+1} = \sqrt{L(n+1) - L(l+1)} y_n^l \quad (8.3a)$$

i

$$\hat{H}^{l+1} y_n^l = \sqrt{L(n+1) - L(l+1)} y_n^{l+1}, \quad (8.3b)$$

gdzie

$$\lambda_n = L(n+1)$$

i

$$y_n^l = A \cdot e^{\int k(x, n+1) dx}.$$

Gdy ograniczymy się do perturbacji pierwszego rzędu, czyli do zakłóceń r , k , L o postaci danej przez wzory (8.1) problem sprowadzi się do znalezienia k^1_l i L^1_l .

Weźmy jako przykład elektron w polu Coulombowskim, z nałożonym słabym jednorodnym polem elektrycznym jako zakłóceniem. Wtedy

$$r^0_l = \frac{2a}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}; \quad r^1_l = \frac{2a'}{x} + \frac{l(l+1)}{a} + 2x; \quad k^0_l = \frac{l}{x} - \frac{a}{l}, \quad L^0(l) = -\frac{1}{l^2},$$

co znamy już z problemu wodoru. Podstawiając wzory (8.1) do równań (8.2ab) i odrzucając małe drugiego rzędu, mamy po skasowaniu się wyrazów zerowego rzędu, równości

$$2k^0_l k^1_l + k^1_l + L^1(l) = -r^1_{l-1}, \quad (8.4a)$$

$$2k^0_l k^1_l - k^1_l + L^1(l) = -r^1_l. \quad (8.4b)$$

Odejmując drugie z tych równań od pierwszego mamy

$$2k^1_l = 2\frac{l}{a}; \quad k^1_l = \frac{l}{a}x + c.$$

Dodając oba równania dla wyznaczenia stałej c i podstawiając wyrażenie na k^1_l otrzymamy po zróżniczkowaniu względem x

$$4k^0_l k^1_l + 4k^0_l k^1_l = -r^1_{l-1} - r^1_l.$$

Porównując współczynniki przy równych potęgach, mamy

$$\frac{4l}{x^2}c = \frac{4a'}{x^2}, \quad \text{co daje } k^1_l = \frac{l}{a}x + \frac{a'}{l}.$$

Musimy znaleźć jeszcze $L^1(l)$, co zrobimy porównując wyrazy wolne w pierwszym z równań (8.4). Znajdujemy

$$\frac{2l^2}{a} + \frac{2aa'}{l} + \frac{l}{a} + L^1(l) = -\frac{(l-1)l}{a},$$

skąd

$$L^1(l) = -\frac{3l^2}{a} - \frac{2aa'}{l};$$

mamy więc ostatecznie

$$\lambda_n = -\frac{1}{(n+1)^2} + \varepsilon \left(-\frac{3(n+1)^2}{a} - \frac{2aa'}{(n+1)^2} \right).$$

Jak widać, przybliżenie to nie ma sensu dla wielkich n .

Funkcja kluczowa ψ_n^n wyrazi się wzorem

$$\psi_n^n = \psi_n^n [1 + \varepsilon \int_0^x k(x, n+1) dx] = \psi_n^n [1 + \varepsilon \left[\frac{n+1}{2a} x^2 - \frac{a'x}{n+1} \right]].$$

Pierwsza z powyższych równości zachodzi ogólnie dla wszystkich perturbacji do których stosują się wzory (8.1). Należy zwrócić uwagę, że przy określaniu r^1 , wprowadziliśmy stałą $\frac{l(l+1)}{a}$, która

nie zmienia równania, jeżeli $\lambda_{fiz} = \lambda_{mat} + \frac{l(l+1)}{a}$. Bez wprowadzenia tej stałej nie moglibyśmy jednak przeprowadzić faktoryzacji, nie wszystkie bowiem $r(x, m)$ dają się sfaktoryzować.

Chodzi o to, aby funkcje problemu zaburzonego były funkcjami nawiązującymi do danego stanu niezaburzonego.

D O D A T E K

Dowód twierdzenia IV z rozdz. 3 podany przez p. P i d e k ó w n ę

Dla $\lambda \neq 2N + 1$ nie istnieje rozwiązanie równania

$$\hat{H} H \underset{v}{\psi}_\lambda = (\lambda - 1) \psi_\lambda, \quad (1)$$

czyli

$$\psi''_\lambda = (\xi^2 - \lambda) \psi_\lambda. \quad (2)$$

całkowalne w kwadracie.

Dla dowodu musimy najpierw udowodnić kilka lematów:

1. Z $\psi_\lambda \rightarrow 0$ wynika, że i pochodna $\psi_\lambda \rightarrow 0$ dla $\xi \rightarrow \pm \infty$.

Istotnie, każda całka równania (2) jest poza pewnym przedziałem skończonym funkcją wypukłą względem osi ξ , gdyż

$$\frac{\psi''_\lambda}{\psi_\lambda} = \xi^2 - \lambda > 0$$

dla

$$|\xi| > \sqrt{\lambda}.$$

Stąd wynika, że dla $|\xi| > \sqrt{\lambda}$ ψ_λ nie posiada miejsc zerowych, jeśli nie jest tożsamościowo zerem. a więc, że jest stałego znaku. Funkcja ψ''_λ ma więc (na podstawie (2)) również stały znak, czyli ψ'_λ jest funkcją monotoniczną. ψ'_λ posiada więc granicę dla $\xi \rightarrow \infty$; granica ta nie może być różna od zera, gdyż $\psi_\lambda \rightarrow 0$.

2. Z tego, że ψ_λ jest całkowalna z kwadratem wynika, że

$$H \psi_\lambda \rightarrow 0.$$

Z definicji

$$H \psi_\lambda = \xi \psi_\lambda + \psi'_\lambda;$$

$\psi'_\lambda \rightarrow 0$; aby zbadać granicę $\xi \psi_\lambda$ całkujemy równanie (2):

$$\psi'_\lambda = \int_{-\infty}^{\xi} (\xi^2 - \lambda) \psi_\lambda d\xi + \text{const.}$$

Lewa strona dąży do zera dla $\xi \rightarrow \pm \infty$, a więc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 - \lambda) \psi_\lambda d\xi$$

jest ograniczona. Funkcja podcałkowa — będąc stałego znaku poza pewnym przedziałem — musi znikać w \pm nieskończoności. Zatem z tego że

$$\xi^2 \psi_\lambda \rightarrow 0 \text{ wynika, że i } \xi \psi_\lambda \rightarrow 0 \text{ oraz } H \psi_\lambda \rightarrow 0 \text{ dla } \xi \rightarrow \pm \infty.$$

3. Z tego, że ψ_λ jest całkowalne z kwadratem wynika, że i $H \psi_\lambda$ jest całkowalne z kwadratem.

Istotnie, mnożąc równanie (1) przez ψ_λ widzimy, że prawa strona jest całkowalna. Całkując obustronnie otrzymujemy:

$$(\psi_\lambda, H H \psi_\lambda) = (\lambda - 1) (\psi_\lambda, \psi_\lambda).$$

Dla lewej strony spełniony jest dla $\xi \rightarrow \pm \infty$ warunek $\psi_\lambda H \psi_\lambda \rightarrow 0$, można więc zastosować twierdzenie o operatorach sprzężonych. Otrzymujemy

$$(H \psi_\lambda, H \psi_\lambda) = (\lambda - 1) (\psi_\lambda, \psi_\lambda) \quad (3)$$

skąd wynika (prawa strona ma sens!), że $H \psi_\lambda$ jest całkowalna z kwadratem.

4. Jeżeli $\psi_\lambda \neq 0$ i $\lambda \neq 1$, to $H \psi_\lambda \neq 0$,

Gdyby przy podanych założeniach było $H \psi_\lambda \equiv 0$, wówczas z równania (1) mielibyśmy

$$(\lambda - 1) \psi_\lambda \equiv 0,$$

co jest niemożliwe.

5. Nie istnieją wartości własne mniejsze od 1. Widać to od razu z równania (3).

Na podstawie powyższych lematów dowód przebiega dalej w sposób podany w rozdziale 3.

Warszawa, październik 1950 r.

*Zakład Fizyki Teoretycznej I
Uniwersytetu Warszawskiego*

WŁODZIMIERZ MOŚCICKI

MEZONY

(c. dalszy)

W technice kliszowej stosuje się metody stanowiące wszelkie możliwe kombinacje pomiarów dwu z trzech wielkości potrzebnych do wyznaczania masy cząstki (wzory II, 2, 3).

Przy stosowaniu metody, w której masę wyznaczamy ze znajomości energii i prędkości, wychodzimy z następujących argumentów: ponieważ gęstość jonizacji zależy tylko od prędkości (wzór II-6), przeto na mocy (II-7)

$$dW/dR=f(v) \quad (\text{II-11})$$

nie zależy od masy cząstki. Ze względu na to, że W jest proporcjonalne do masy cząstki M , mamy też dla dwu cząstek o tej samej prędkości i o masach M_1 i M_2

$$R_1/R_2=M_1/M_2, \quad (\text{II-12})$$

jeżeli R_1 i R_2 oznaczają odpowiednie zasięgi. Jeżeli więc znajdziemy empiryczny wzór $W=W(R)$ dla jednego gatunku cząstek o znanej masie, to porównując zasięgi tych cząstek z zasięgami np. mezonu w tym samym materiale jesteśmy w stanie wyznaczyć masę mezonu, o ile prędkości obu porównywanych cząstek przy wejściu do absorbenta będą identyczne.

Bezpośrednie pomiary (Lattes et al. (48), Barkas et al. (7)) wykazały, że dla protonów spełniony jest związek

$$W_p=kR_p^n \quad (\text{II-13})$$

(k , n —stałe); wobec tego dla mezonu o masie μ mamy równanie

$$W_\mu=k \cdot R_\mu^n \cdot (\mu/M)^{2-n}. \quad (\text{II-14})$$

Jeżeli więc posługujemy się do wyznaczenia masy mezonu wielkościami W i v , to pierwszą wielkość uzyskujemy z równania (II-14), drugą natomiast z wartości jonizacji właściwej J (II-6), która — jak widzieliśmy — jest tylko funkcją prędkości (dla $z=1$). Z obserwacji gęstości ziaren emulsji wywołanych wzdłuż toru cząstki możemy bezpośrednio wnioskować o jej prędkości v^{15}). Mamy więc dla cząstek powolnych (a tylko takie wchodzą przy tej metodzie w grę)

$$W = \mu v^2 / 2 = R_\mu^n \left(\frac{\mu}{M} \right)^{1-n} \quad (\text{II-15})$$

skąd

$$\mu = k_1 \cdot R_\mu \cdot v^{-2/n} \quad (\text{II-16})$$

(k_1 — stała).

W praktyce postępuje się trochę inaczej. Ponieważ z wywołaniem każdego ziarna w emulsji związana jest określona strata energii, przeto $W = \text{const. } N$, gdzie N oznacza liczbę ziaren. Mamy wobec tego dla takiego samego ubytku prędkości protonu i mezonu

$$R_p / R_\mu = N_p / N_\mu = M / \mu, \quad (\text{II-17a})$$

oznacza, że jeżeli empirycznie ustalimy dla protonów związek pomiędzy liczbą ziaren wywołanych i zasięgiem

$$N_p = f(R_p) \quad (\text{II-18})$$

to dla mezonów będzie odpowiednio

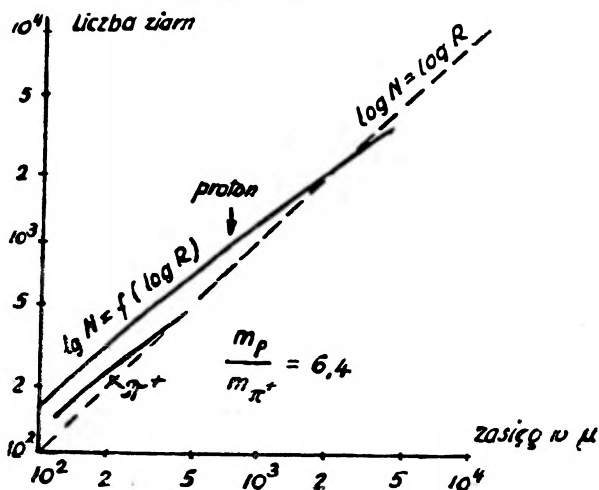
$$N_\mu = \mu / M \cdot f(R_p) = \mu / M \cdot f(R_\mu \cdot M / \mu) \quad (\text{II-19})$$

i związek ten zależy już tylko od poszukiwanej masy.

Odkładając $\log N$ w funkcji $\log R$ dla dwu różnych cząstek, których masy chcemy porównać, i prowadząc następnie prostą $\log N = \log R$, która przecina obie wykreślone funkcje $\log N = f(\log R)$ w punktach odpowiadających tej samej prędkości cząstek (II-17a), otrzymujemy na stosunek mas stosunek wartości R dla obu uzyskanych w ten sposób punktów. Rys. 6 pokazuje wykres

¹⁵⁾ Oczywiście, emulsja musi być uprzednio „wykalibrowana“ przy pomocy np. protonów o znanej prędkości.

$\log N = f(\log R)$ dla protonów (krzywa górna) i mezonów, których masę zamierzamy wyznaczyć¹⁶⁾.



Rys. 6

Inna metoda stosowana przy użyciu emulsji opiera się na znalezieniu pędu i energii cząstki.

Jedna z modyfikacji tej metody została zaproponowana przez Powella i Rosenbluma (65): dwie klisze obrócone do siebie emulsją światłoczułą, oddzielone odstępem rzędu kilku mm, umieszcza się w polu magnetycznym tak, ażeby linie pola przechodziły prostopadłe do powierzchni klisz i do spodziewanego kierunku lotu mezonu. Jeżeli jakakolwiek cząstka jonizująca pada na kliszę tworząc z powierzchnią kliszy niewielki kąt, to w emulsji powstaje ślad wyznaczając chwilowy kierunek pędu cząstki. Po wyjściu z warstwy światłoczułej cząstka dostaje się w obszar działania pola magnetycznego. W obszarze tym składowa pędu tej cząstki prostopadła do kierunku linii sił pola magnetycznego doznaje skręcenia o pewien kąt — tak że po przedostaniu się do następnej kliszy kierunek lotu cząstki jest zmieniony.

Mierząc kąt, jaki tworzą z sobą tory cząstki w obu kliszach, natężenie indukcji B , odstęp pomiędzy punktami, w których cząstka weszła do obu klisz, oraz odległość pomiędzy kliszami, można wyznaczyć całkowity pęd cząstki.

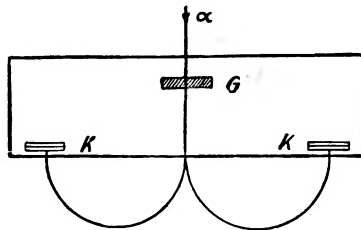
Drugą wielkość potrzebną do wyznaczenia masy można określić z zasięgu R cząstki w emulsji światłoczułej. Jest rzeczą jasną, że

¹⁶⁾ Na rysunku krzywa dolna odnosi się do mezonu π . (Por. rozdz. III).

to ostatnie możliwe jest tylko wtedy, kiedy badana cząstka zatrzymuje się w kliszy. Wyniki uzyskane tą metodą pozwalają na znaczne zmniejszenie błędów, którymi obarczone są pomiary przy stosowaniu innych technik wyznaczania masy metodą kliszową. Daje też ona najpewniejsze wartości na masę mezonu μ z pomiędzy tych, które otrzymano przy użyciu techniki kliszowej. Fran z i n e t t i (34) otrzymał w ten sposób na masę mezonu μ wartość

$$\mu = (217 \pm 4) m_0. \quad (\text{II-10b})$$

Zbliżoną w zasadzie metodę stosuje się do badania mezonów uzyskanych przez bombardowanie cząstkami α lub deuteronami rozpędzonymi przy pomocy synchrotronu (p. rozdz. III e). Wiązka mezonów wylatujących z płyty grafitowej bombardowanej cząst-



Rys. 7

kami α o dużej energii (rzędu 400 MeV)—zostaje zakrzywiona w polu magnetycznym synchrotronu, a następnie pada prostopadłe na kliszę o grubości emulsji 100 μ . Kombinując mierzony w emulsji zasięg mezonów ze znanym promieniem krzywizny toru (p. rys 7) można było wyznaczyć masę cząstek zatrzymanych w kliszy ze znacznie większą dokładnością niż masę mezonów promieniowania kosmicznego. Otrzymana w ten sposób (Gardener, Lattes (37), Burfening, Gardener, Lattes (16)) wartość

$$\mu = (215 \pm 4) m_0, \quad (\text{II-10c})$$

stanowi zupełnie pewny dowód na to, że mezony promieniowania kosmicznego są identyczne z mezonami „sztucznymi“.

Podstawowe znaczenie posiada metoda stanowiąca kombinację, w której do wyznaczenia masy posługujemy się prędkością uzyskaną z analizy gęstości ziaren wzdłuż toru cząstki oraz wartością pędu z analizy średniego kąta rozproszenia kulombowskiego. Donio-

słość tej metody polega na tym, że pozwala ona na określenie masy cząstek o tak wielkich energiach, przy których inne metody całkowicie zawodzą (64).

Podana przez Williamsa (100) teoria rozprożeń kulombowskich pokazuje, że średnia wartość kwadratu rzutu odchylenia toru cząstki, wynikającego z rozprożeń kulombowskich, na dowolną płaszczyznę — $\langle \alpha^2 \rangle$ — jest funkcją pędu cząstki P , drogi przebytej w ośrodku rozpraszającym l , liczby atomów rozpraszających w jednostce objętości N , oraz numeru porządkowego atomów rozpraszających Z . Funkcja ta posiada kształt (Janossy l. c.)

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{8 \pi Z^2 e^4 M^3}{3 A P^2 (v/c)^2} \log 181Z^{-1/3}, \quad (\text{II-20})$$

gdzie A oznacza pewną stałą.

Znając stałe charakterystyczne ośrodka N i Z można przez pomiar $\langle \alpha^2 \rangle$ i l wyznaczyć P . Korzystając ponadto ze związku (II-6) można wyznaczyć, przez pomiar liczby ziaren na jednostce drogi wzdłuż toru cząstki, jej prędkość.

Metoda ta, opracowana przez Goldschmidt-Clermont et al. (l. c.), była stosowana przez Davisa et al. (27), Camerini et al. (17) i ze szczególnym powodzeniem przez Fowlera (32) do badania mas bardzo szybkich mezonów (por. IIIb, f).

Ponieważ związek $W = W(R)$ nigdy nie jest zupełnie ścisły — Bishop, Bradner i Smith (13), opracowali nową metodę pomiaru masy mezonów uzyskanych na drodze laboratoryjnej, w której posługujemy się pośrednio wielkościami W i P .

Dla dwu różnych cząstek o tej samej prędkości mamy zawsze $P_1; P_2 = M_1; M_2$; jeżeli więc pomiaru pędu dokonujemy przez pomiar indukcji magnetycznej B i promienia krzywizny toru (r) — por. (II-5) — to uwzględniając relację (II-17a) można napisać dla protonu i mezonu proporcję.

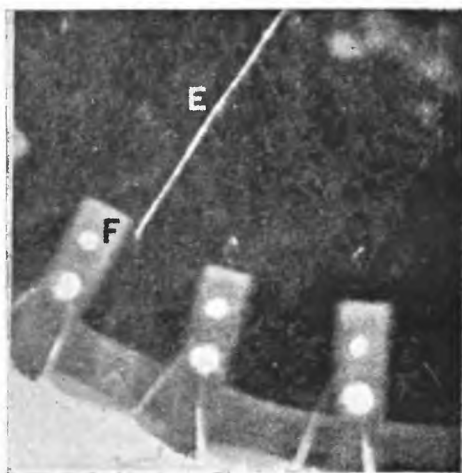
$$M/\mu = R_M/R_\mu = (Br)_M/(Br)_\mu, \quad (\text{II-17b})$$

przy czym rezultat powyższy nie należy już od empirycznie znalezionej wzoru $W = W(R)$.

Pomiar polega na dobraniu takich wartości $(Br)_M$ oraz $(Br)_\mu$, przy których stosunek zasięgów $R_M:R_\mu$ jest równy stosunkowi $(Br)_M:(Br)_\mu$ — i bezpośrednio wyznacza $M:\mu$. Metoda ta do wyznaczenia masy mezonu μ nie została dotychczas użyta.

c) *Rozpad mezonu μ^+*

Zgodnie z przewidywaniami Yukawy mezon sił jądrowych — yukon — powinien być cząstką nietrwałą i ulegać spontanicznemu rozpadowi ze średnim czasem życia $0,25 \cdot 10^{-6}$ sek. Ponieważ, jak okazały prace doświadczalne, również i mezon promieniowania kosmicznego (mezon μ) jest cząstką nietrwałą, powstało bardzo dobrze, jak się wydawało, uzasadnione przekonanie, że mezon znaleziony w promieniowaniu kosmicznym jest właśnie przewidywanym teoretycznie yukonem.



Rys. 8

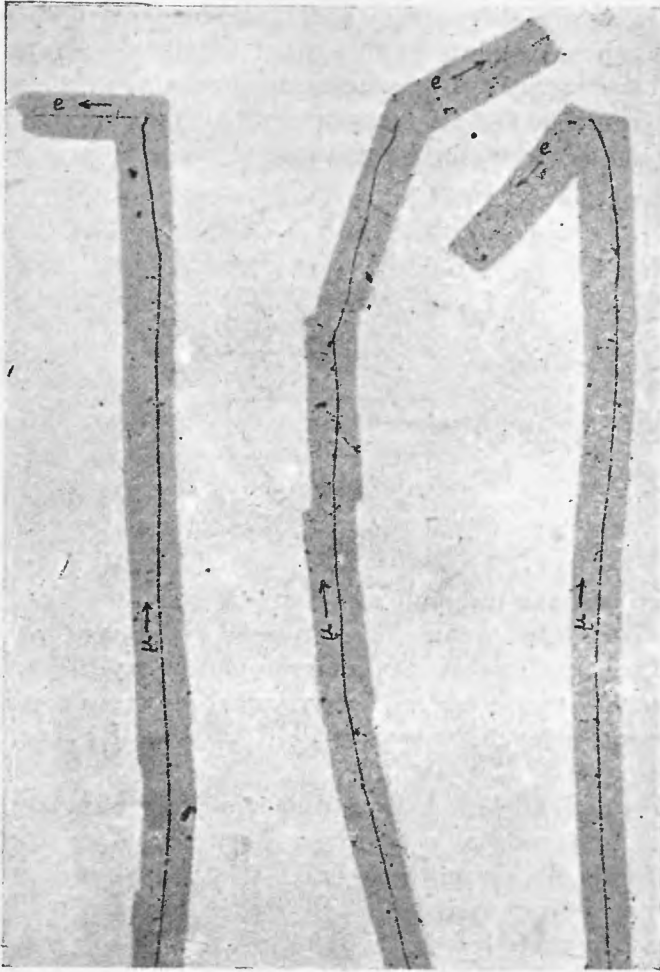
Pierwszym bezpośrednim dowodem nietrwałości mezonu była fotografia opublikowana w 1940 r. przez Williamsa i Roberta (101). Fotografii tę (rys. 8) uzyskano w komorze Wilsona sterowanej licznikami G. M. Na fotografii tej powolny mezon przedostaje się do komory i, rozpadając się, emituje szybki elektron. Fotografii tego zjawiska posiadamy obecnie kilkadziesiąt ((2), (5), (12), (45), (101)).

Szczególnie ciekawe światło na mechanizm rozpadu mezonów rzucają prace Andersona (2,3), któremu udało się uzyskać około 73 zdjęć rozpadów mezonu w komorze Wilsona i pomierzyć energie wyrzucanych elektronów (patrz II-g).

Fotografie rozpadu mezonu z wyrzuceniem elektronu uzyskuje się też przy użyciu techniki kliszowej. Na rys. 9 widzimy fotomikro-

mozaikę rozpadu mezonu, opublikowaną przez P o w e l l a (I/15,16). Tor elektronu rozpadowego oznaczony jest na tej fotografii literą *e*.

Obok bezpośrednich dowodów nietrwałości mezonu, wynikających z opublikowanych fotografii, istnieją też dowody pośrednie.

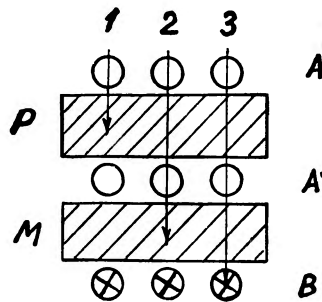


Rys. 9

Jednym z takich dowodów, pozwalających na ocenę średniego czasu życia mezonu, jest stwierdzony doświadczalnie fakt, że ubytek natężenia promieniowania mezonowego zależy nie tylko od współczynnika absorpcji materii, przez którą mezony przelatują, ale ponadto od przebytej drogi. Idealizując wyżej powiedziane,

można by dać następujący obraz: wiązka promieniowania mezonowego o natężeniu I_0 , poruszająca się w próżni w określonym kierunku, będzie ulegała ciągłemu osłabianiu natężenia i po pewnym czasie natężenie jej zmaleje do zera.

W powietrzu zjawisko jest bardziej skomplikowane. Nakładają się tu dwa efekty; strata energii mezonu wskutek procesów zachodzących w ośrodku wzdłuż drogi przelotu — strata ta może wreszcie osiągnąć wartość równą energii początkowej mezonu i spowodować zatrzymanie się mezonu — oraz drugi efekt, niezależny bezpośrednio od pierwszego, a mianowicie różne od zera prawdopo-



Rys. 10

dobieństwo rozpadu mezonu. Superpozycję tych dwu efektów obserwuje się jako tzw. anomalie absorpcji, polegającą na tym, że natężenie promieniowania mezonowego maleje szybciej przy przejściu warstwy powietrza niż przy przejściu równoważnej pod względem zawartej masy warstwy np. ołowiu (Follet, Crawshaw (31)).

Z obserwacji absorpcji anomalnej można w zasadzie obliczyć średni czas życia mezonu w sposób następujący. Wybierzmy z biegnącej prostopadle do powierzchni Ziemi wiązki promieniowania kosmicznego mezony o określonych pędach. Wyboru takiego możemy dokonać przez odpowiedni układ teleskopowy liczników G. M., przedzielonych dobranymi warstwami ołowiu i ustawionych w układzie koincydencyjnym lub antykoincydencyjnym. Rys. 10 podaje schemat urządzenia. Z wiązki promieniowania mezonowego wybieramy 3 mezony (oznaczone na rysunku cyframi 1, 2, 3) o różnych pędach. Pomiędzy płytami ołowianymi M i P , służącymi jako materiał absorpcyjny, ustawiamy teleskopowy układ liczników w koincydencji (A , A'). Jest rzeczą jasną, że układ ten rejestro-

wać będzie tylko takie mezony, których pędy są większe od pędu mezonu 1 absorbowanego w filtrze P . Pod płytą M ustawiamy znów liczniki B w antykoincydencji do A ; liczniki te z liczby impulsów zarejestrowanych przez liczniki A wybierają tylko takie, które odpowiadają mezonom o pędach wystarczających do przejścia filtru P , ale nie wystarczających do przejścia przez oba filtry. Drugi analogiczny pomiar wykonywuje się bez warstwy ołowiu P w miejscowości położonej niżej i przedzielonej od poprzedniej taką warstwą powietrza, której masa równa się masie ołowiu zawartej w filtrze P . Gdyby mezony były cząstkami trwałymi, liczba ich w drugim doświadczeniu musiałaby być równa tej liczbie, którą otrzymaliśmy w doświadczeniu pierwszym. Jeżeli jednak jest to cząstka nietrwała o średnim czasie życia t_0 , to po upływie czasu dt z N mezonów rozpadowi ulegnie

$$dN = -\frac{1}{t_0} N \cdot dt, \quad (II-21)$$

mezonów. Wobec tego liczba mezonów, które winny dojść do aparatury położonej niżej, będzie:

$$N = N_0 e^{-t/t_0}, \quad (II-22)$$

(t oznacza czas przelotu mezonu pomiędzy miejscowościami obserwacji, N_0 liczbę mezonów typu „2“, znalezionych w pierwszym doświadczeniu). Znając N i N_0 możemy wyznaczyć t_0 . Trzeba jednak zwrócić uwagę na to, że tak zmierzony średni czas życia wypadnie różnie dla mezonów o różnych pędach. Należy bowiem uwzględnić, że czas w układach poruszających się względem obserwatora ulega lorentzowskiej dylatacji i że wielkość tej dylatacji zależy od prędkości ruchu, a więc tutaj od pędu mezonu. Mezony szybkie będą posiadały dłuższy średni czas życia w układzie odniesienia obserwatora niż mezony powolne. Pragnąc uwolnić się od tej nieokreśloności należy wprowadzić czas własny mezonu, tzn. czas w układzie spoczywającym względem obserwowanego mezonu. Jeżeli średni czas życia mezonu spoczywającego oznaczmy przez t_0 , to średni czas życia mezonu poruszającego się z prędkością v będzie

$$t_v = \beta t_0, \quad (II-23)$$

gdzie

$$\beta = \{1 - (v/c)^2\}^{-1/2}.$$

Ponieważ energia mezonu

$$E = m c^2 = \mu c^2 \beta, \quad (II-24)$$

więc

$$\beta = E/\mu c^2 \quad (\text{II-25})$$

i równanie (II-23) można napisać:

$$t_v = t_0 \cdot E/\mu_0 c^2. \quad (\text{II-26})$$

Pamiętając, że dla cząstek o prędkości zbliżonej do prędkości światła,

$$P = Mv \cong Mc = E/c, \quad (\text{II-27})$$

otrzymamy ostatecznie na liczbę mezonów o wybranych pędach P , które dolecą do drugiej, położonej niżej aparatury,

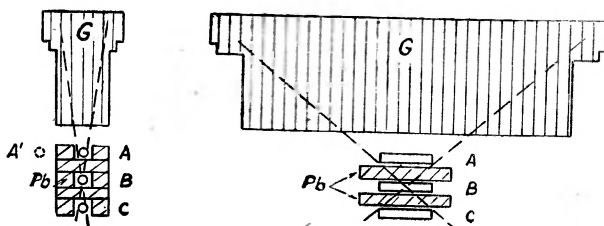
$$N = N_0 e^{-\frac{\mu}{P t_0} x}, \quad (\text{II-28})$$

gdzie $x=ct$ oznacza odległość dzielącą obie aparatury.

Przewidywana przez teorię anomalia w absorpcji mezonów dostrzeżona była w 1936 r. przez Folleta i Crawshaw, (l. c.). Dokładniejsze zbadanie tego zjawiska zawdzięczamy szkole Augera (57). Teorię zjawiska podał Kulenkampff (47 i 62).

Johnson i Pomerantz (44) mierzyli w celu wyznaczenia średniego czasu życia mezonu liczbę koincydencji poczwórnego teleskopu, skierowanego w pierwszej serii pomiarów pionowo i osłoniętego warstwą 8,9 m wody albo płytą ołowianą równoważnej grubości; druga seria pomiarów wykonana była przy teleskopie skierowanym pod kątem 58° względem pionu, w którym to położeniu warstwa powietrza atmosferycznego była równoważna poprzednio użytej warstwie wody lub ołowiu + warstwa powietrza z pierwszego ustawienia. W obu doświadczeniach okazało się, że liczba koincydencji teleskopu ustawionego pochyło jest mniejsza od liczby koincydencji w teleskopie ustawionym pionowo. Interpretacja wyników doświadczalnych prowadzi do wyznaczenia średniego czasu życia mezonu μ , który wypada w granicach od 2 do 4 mikrosekund. Rossi, Hilberry i Hoag (71) posługując się aparaturą, której schemat ideowy pokazuje rys. 11, dokonywali pomiarów natężenia składowej mezonowej na różnych wysokościach (Chicago 180 m, Denver — 1616 m, Echo Lake — 3240 m, Mt Evans — 4300 m). Pomiarów dokonywano: 1) bez i 2) z filtrem grafitowym (G — rys. 11) o grubości ok. 80-90 g/cm², umieszczonym nad teleskopem A,

B, *C*, osłoniętym skrzynią ołowianą (*Pb*). Wyniki uzyskane przez autorów pracy dały na średni czas życia mezonu wartość ok. 2 mikrosekund.



Rys. 11

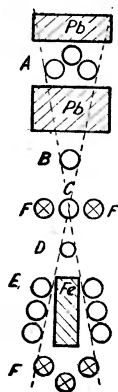
Inne prace (Bernardini et al. (10), Nielsen et al. (58), Neher i Stever (55)), przeprowadzone zbliżonymi do opisanych metodami, dały wyniki zgodne z poprzednimi — nie polepszając jednak dokładności w wyznaczeniu średniego czasu życia mezonu. Dopiero wprowadzenie układu antykoincydencyjnego i separacja mezonów określonego pędu według schematu ideowego podanego na rys. 10 pozwoliła Rossiemu (70) na znaczne poprawienie precyzji oceny średniego czasu życia mezonu μ^+ . W wyniku przeprowadzonych pomiarów Rossi znalazł

$$t_0 = (2,4 \pm 0,3) \mu \text{ sek.} \quad (\text{II-29a})$$

Znacznie pewniejsze wyniki uzyskuje się mierząc bezpośrednio średni czas życia mezonu spoczywającego. Typowy schemat aparatury służącej do tego celu podaje rys. 12. Koincydencyjny teleskop liczników *A*, *B*, *C*, *D*, wydzielający, dzięki filtrowi ołowianemu (*Pb*), przedzielającemu liczniki, składową twardą promieniowania kosmicznego, rejestruje przejście mezonu tylko w tym przypadku, kiedy mezon ten zostanie zaabsorbowany w bloku żelaznym (*Fe*), pod którym umieszczony jest zespół liczników *F* pracujących w antykoincydencji względem teleskopu *A*, *B*, *C*, *D*.

Kończący swój żywot mezon ulega rozpadowi na elektron i ewtl. jedną lub kilka cząstek niejonizujących. Moment pojawienia się elektronu może być określony przy pomocy układu liczników *E*, których wyładowanie jest warunkiem koniecznym rejestracji impulsu całej aparatury. Oczywiście, wyładowanie w licznikach *E* zachodzi w pewnym odstępie czasu po rozbrojeniu układu

A, B, C, D , wobec czego antykoincydencja ($A, B, C, D, — F : E$) może nastąpić tylko w tym przypadku, kiedy impuls A, B, C, D zostanie zapóźniony względem E o okres czasu odpowiadający czasowi życia mezonu rozpadającego się w absorbencie F_e .



Rys. 12

Pierwsze prace poświęcone oznaczeniu średniego czasu życia mezonu spoczywającego, posługujące się metodą koincydencji zapóźnionych, dały — ze względu na niedostateczne opanowanie techniki zapóźnień — wynik negatywny (I/45). Powtórzenie doświadczenia przez Rassetiego (66) dało wynik pozytywny. W pracy Rassetiego materiałem absorbującym mezony był blok żelazny o grubości 10 cm. Stosowane zapóźniecia wynosiły: 3,6, 3, 1 i 1,2 μ sek. Liczby elektronów rozpadowych opuszczających absorbent w przedziale określonego zapóźniecia i powodujące wyzwolenie impulsu ($A, B, C, D, — F : E$) dały w ciągu 207 godzin pracy aparatury odpowiednio liczby: 170, 142, 119 koincydencji zapóźnionych. Zakładając prawo wykładniczego zaniku mezonów (wzór 46) można otrzymać 3 równania pozwalające wyznaczyć t_0 . Uzyskany rezultat wynosi w tej pracy

$$t_0 = (3,1 \pm 1,5) \mu \text{ sek.} \quad ^{17)} \quad (\text{II-29b})$$

Precyzja pomiaru została znacznie powiększona w pracy Rossiego i Neresona (72). Aparatura rejestrująca elektrony

¹⁷⁾ W następnej pracy (l. c.) autor uzyskał wynik $1,5 \pm 0,3 \mu$ sek.

rozpadowe mogła rejestrować wszystkie elektrony rozpadowe, które po koincydencji teleskopu A, B, C, D powodowały wyładowanie liczników E (rys. 12).

Zasada układu rejestrującego była następująca: impuls koincydencji liczników układu teleskopowego (T) i impuls liczników E (E) dawano na wejście specjalnego układu „czasowego”. Układ ten dawał na wyjściu impuls, którego amplituda była funkcją czasu upływającego pomiędzy sygnałami T i E . Amplitudę tego sygnału odczytywano na oscylografie katodowym, uzyskując w ten sposób dokładną ewidencję czasu życia poszczególnych mezonów. Krzywa przedstawiona na rys. 13 przedstawia krzywą kalibracji układu „czasowego”. Na wykresie widzimy amplitudę sygnału wyjściowego w funkcji odstępów czasowego, mierzonego w mikrosekundach. Jako absorbentów autorzy używali płyt mosiężnych, glinowych



Rys. 13

i ołowianych. Autorzy stwierdzili, że krzywa wyrażająca liczbę rozpadających się mezonów μ w funkcji czasu jest krzywą wykładniczą posiadającą kształt $N=Ae^{-t/t_0}$, gdzie A oznacza stałą zależną od warunków doświadczenia, t — czas upływający od chwili wyzwolenia układu czasowego, (sygnał T) do chwili zablokowanie układu (sygnał E); t_0 oznacza średni czas życia mezonu. Z uzyskanych danych można było wyznaczyć t_0 , które wynosi w tej pracy

$$t_0 = (2,15 \pm 0,07) \mu \text{ sek.} \quad (\text{II-29c})$$

Dalsze udoskonalenie metody pomiaru średniego czasu mezonu spoczywającego wprowadził Жданов (Жданов, Наумов (106)),

który zamiast absorbenta ołowiowego użył grafitu, a zamiast pojedynczych liczników rejestrujących elektron rozpadowy — pary liczników koincydencyjnych. Innym udoskonaleniem radzieckiego uczonego było ustalenie na drodze doświadczałnej liczby impulsów przypadkowych i liczby impulsów wynikających z fałszywych zapóźnień związanych z procesem wyładowania w licznikach.

Dalsze prace związane z omawianym zagadnieniem (Conversi, Piccioni (24)), nie dały lepszych dokładności niż uzyskane przez Rossiego i Neresona¹⁸⁾.

Dowód na to, że istotnie produktem rozpadu mezonu μ^+ jest elektron, przeprowadzili Hincks i Pontecorvo (41)¹⁹⁾. Obserwowali oni straty energii cząstek emitowanych w procesie rozpadu mezonu μ wynikające z promieniowania hamowania cząstki w polu elektrycznym (*Bremsstrahlung*). Straty te porównywano ze stratami doznawanymi przez elektrony o tej samej mniej więcej energii (ok. 40 MeV).

Ponieważ prawdopodobieństwo procesu promieniowania *Bremsstrahlung* zależy od masy cząstki²⁰⁾, można było stwierdzić, że masa cząstki emitowanej w czasie rozpadu mezonu $m_\eta < 2m_0$.

W nieopublikowanej do lata 1950 r. pracy Camerini i Fowler (por. Powell (64)), zanalizowali proces zderzenia cząstki emitowanej przez mezon μ z elektronem. Ponieważ po zderzeniu nie istniała możliwość odróżnienia cząstki emitowanej w rozpadzie μ od elektronu, z którym się ona zderzyła, wynik uzyskany przez autorów ma dwie wartości, zależnie od tego, który tor przyporządkowano elektronowi, a który cząstce emitowanej przez mezon. Stwierdzili oni, że albo $m_\eta = (3 \pm 2)m_0$, albo $m_\eta = (1,2 \pm 0,5)m_0$.

Obie cytowane prace stanowią wystarczający dowód na to, że istotnie cząstką naładowaną emitowaną w procesie rozpadu mezonu jest elektron.

¹⁸⁾ Zbliżoną wartość do (II-29c), bo $t_0 = 2,11 \pm 0,1$ uzyskał Ticho (107). Również metoda analizy magnetycznej z użyciem hodoskopu, stosowana przez badaczy radzieckich — Ваїсенберг (43) — pozwoliła określić średni czas życia mezonu μ^+ na ok. 2 μ sek.

¹⁹⁾ Pracę na ten temat, ale z mniejszą dokładnością, wykonali też Fletcher i Forster (30).

²⁰⁾ Natężenie promieniowania elektromagnetycznego ładunku poruszającego się ruchem zmiennym jest, jak wiadomo, proporcjonalne do $(dv/dt)^2$. Jeżeli cząstka o ładunku elementarnym przelatuje w pobliżu jądra o ładunku Ze , to przyśpieszenie, jakiego doznaje, jest proporcjonalne do Ze^2/m , (m — masa cząstki), a natężenie promieniowania (*Bremsstrahlung*) — proporcjonalne do $(Ze^2/m)^2$.

d) *Rozpad i absorpcja jądrowa mezonu μ^- .*

Na wszystkich fotografiach przedstawiających zatrzymanie się mezonów wewnątrz komory wilsonowskiej (Williams, Roberts (102), Shutt, De-Benedetti, Johnson (80), Johnson, Shutt (15), Anderson et al. (2), Adams et al. (1), Thompson (10), Leighton, Anderson, Seriff (51), Биргер, Эйдус (12)), uderza fakt, że jeżeli mezon kończy swój bieg rozpadem z emisją elektronu, zakrzywienie toru mezonu w polu magnetycznym wskazuje na to, iż ma się tu do czynienia z mezonem dodatnim. Wszystkie natomiast zidentyfikowane mezony ujemne kończą swój bieg bez emisji elektronu rozpadowego i bez jakichkolwiek śladów innych cząstek. Wyjaśnienie tego zjawiska podali w 1940 r. równocześnie Tomonaga i Araki (88) oraz Pomerančuk i Migdał (Померанчук, Мигдал (61)). Zwrócili oni uwagę na konsekwencje wypływające z istnienia dodatniej bariery potencjału w jądrach atomowych dla procesu chwytania mezonów. Długozasięgowe siły pola elektrostatycznego będą działały w sensie przyciągania na mezony ujemne, a w sensie odpychania na mezony dodatnie. W wyniku tego, zważywszy, że mezon jest nietrwały, szansa pochwylenia mezonu dodatniego jest, praktycznie biorąc, równa zeru. Tomonaga i Araki znaleźli, że np. w powietrzu pod ciśnieniem normalnym stosunek prawdopodobieństw pochwylenia powolnego mezonu ujemnego do pochwylenia powolnego mezonu dodatniego przedstawia się liczbą 10^{97} . Okazuje się przy tym, że szansa spontanicznego rozpadu mezonu ujemnego wynosi 1 mezon na $30 \cdot 10^6$ pochwyconych, a dla ołowiu nawet $1 : 2,5 \cdot 10^{12}$. Tymczasem dla mezonów dodatnich praktycznie biorąc wszystkie mezony ulegają spontanicznemu rozpadowi.

Pierwsze prace doświadczalne mające na celu sprawdzenie przewidywanych właściwości mezonów ujemnych μ^- dały wyniki rozbieżne. Autorzy francuscy (Auger, Maze, Chaminade (6)) znaleźli wbrew przewidywaniom, że wszystkie mezony niezależnie od znaku ulegają rozpadowi. Rasetti (66) natomiast uzyskał wynik, z którego wynikało, że tylko ok. 50% zatrzymanych w absorbcencie mezonów daje elektrony rozpadowe. Podobny wynik uzyskali z dużą precyzją Conversi i Piccioni (24) oraz Ticho i Schein (87).

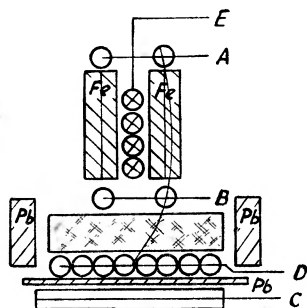
Aparatura, którą się tutaj posługiwano, niczym w zasadzie nie różni się od używanej dla oceny średniego czasu życia mezonu.

Całkowitą liczbę zatrzymanych mezonów daje układ wyzwalający ($ABCD-F$) (rys. 12), liczbę elektronów rozpadowych, (a więc i liczbę rozpadających się mezonów) uzyskuje się analizując liczby impulsów zapóźnionych (E) w zależności od wielkości zapóźnienia. Należy podkreślić, że wszyscy badacze używali jako absorbentów glinu, żelaza i mosiądzu.

Precyzyjne pomiary średniego czasu życia mezonów powolnych zatrzymanych w glinie na wysokości 3.830 m (Climaix, Colorado), przeprowadzone przez Ticho (87), dały — wbrew danym uzyskanym poprzednio na poziomie morza przez Rossiego i Nersona (72) — wartość $1,78 \pm 0,1 \mu$ sek. Ticho interpretował ten wynik przypuszczając, że na dużych wysokościach wzrasta procentowo liczba mezonów ujemnych, które rozpadając się z krótszym średnim czasem życia powodują też skrócenie wypadkowego średniego czasu życia mezonów obu znaków. Przypuszczenie to nie zostało potwierdzone przez dalsze prace Rossiego (Rossi, Sands, Sard (83)). Rossi badał czas życia mezonów powolnych zatrzymujących się w płycie Al na wysokościach: 0 m, 4.600 m, 8.300 m i 11.600 m i na wszystkich wysokościach znalazł czas życia mezonów w pobliżu dawniej wyznaczonej wartości $t_0 = 2,15$ sek. Przyczyny rozbieżności wyników uzyskanych przez Rossiego i Ticho można wyjaśnić według Żdanowa (Жданов, Хайдаров (105)), „rozmyciem” zasięgu elektronów rozpadowych wywołującym opóźnione wyładowanie w licznikach „zapóźnieniowych”. Powodami tego rozmycia mogą być: 1) rozproszenia rutherfordowskie (klasyczne), 2) rozproszenia „zderzeniowe” — o wielkie kąty — wyrzucające elektrony z kąta bryłowego określonego aparaturą, 3) fluktuacja energii elektronów związana z promieniowaniem hamowania (*Bremsstrahlung*), 4) konwersja fotonów tego promieniowania na pary, 5) anihilacja pozytonów rozpadowych.

Ostatecznego rozstrzygnięcia sprawy rozpadu mezonów μ dokonali Conversi, Pancini, Piccioni w 1947 r. (23). Autorzy ci opublikowali wówczas pierwsze wyniki dotyczące badań zachowania się mezonów ujemnych zatrzymanych w graficie. Wbrew przewidywaniom znaleziono, że znaczna część mezonów ujemnych ulega rozpadowi. Aparatura którą posługiwali się włoscy badacze, pozwalała na rozdzielenie powolnych mezonów różnych znaków. Istotne to udoskonalenie zostało uzyskane dzięki zastosowaniu pola magnetycznego odchylającego toru mezonów różnych znaków w przeciwne strony. Rys. 14 przedstawia schemat aparatury.

Liczniki A, B, C i A, B, C, D dają potrójne i poczwórne antykoincydencje zapóźnione. Centymetrowy filtr ołowiany przedzielający zespoły C i D służy jako absorbent elektronów rozpadowych, tak że różnica wskazań $(A B - C) - (A B - C : D)$, daje liczbę mezonów rozpadających się w absorbencie umieszczonym pomiędzy B i C .



Rys. 14

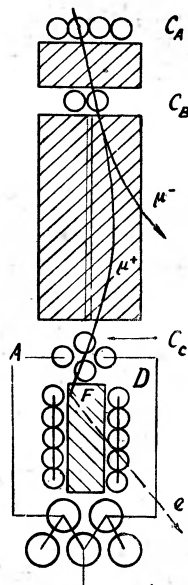
Tory powolnych mezonów wchodzących do aparatury poprzez liczniki A zostają zakrzywione w polu magnetycznym namagnesowanych płyt stalowych (Fe). W ten sposób tylko mezony jednego znaku mogą przedostać się do liczników B . Mezony przeciwnego znaku zostają albo wyrzucone z aparatury, albo też trafiają na liczniki pracujące w antykoincydencji i odpadają z rejestracji.

Dalsze prace (Sigurgeirsson, Yamakawa (81), Ticho, Schein (87)), związane z rozpadem powolnych mezonów ujemnych w ciałach o niskich numerach porządkowych, potwierdziły zjawisko odkryte przez Conversi, Pancini i Piccioni.

Udoskonalenie techniki pomiarowej przez wprowadzenie obok soczewek magnetycznych układu antykoincydencyjnego umożliwiło Ticho i Scheinowi (l. c) nie tylko potwierdzić jakościowo zjawisko, ale określić ponadto średni czas życia mezonu μ^- w NaF . Wymienieni autorzy otrzymali tu wartość na $t_0 = (1,33 \pm 0,14)$ sek. Kontynuując pomiary zmierzili oni dalej średnie czasy życia mezonów dodatnich i ujemnych w różnych substancjach i analizując uzyskane wyniki podali stosunek liczby rozpadających się mezonów dodatnich do liczby rozpadających się mezonów ujemnych. Tab. II zestawia wyniki uzyskane przez Ticho i Scheina.

Tabela II

Material	Z	znak	t_0	N^+/N^-
H ₂ O	8	+	$2,19 \pm 0,30$	1,2
		-	$1,89 \pm 0,15$	
NaF	10,1	+	$2,14 \pm 0,27$	1,7
		-	$1,28 \pm 0,12$	
Mg	12	+	$2,14 \pm 0,21$	1,8
		-	$0,96 \pm 0,06$	
Al	13	+	$2,04 \pm 0,18$	2,5
		-	$0,75 \pm 0,07$	
S	16	+	$2,13 \pm 0,25$	3,5
		-	$0,54 \pm 0,12$	

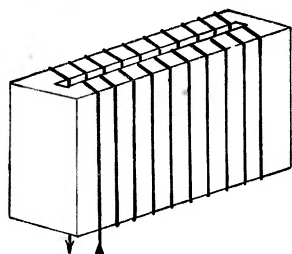


Rys. 15

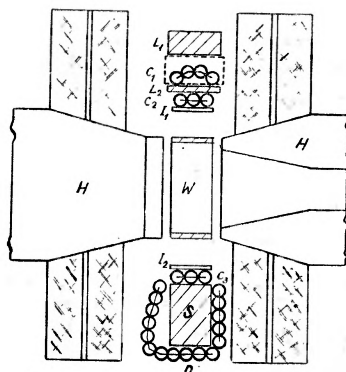
Schemat aparatury używanej przez Ticho i Scheina przedstawia rys. 15. Liczniki C pracują w koincydencji, liczniki D — w koincydencji zapóźnionej, A — w antykoincydencji. μ^- oznacza tor mezonu ujemnego, μ^+ — dodatniego, e oznacza tor elektronu, F — substancję absorbującą, między licznikami C_C i C_B widzimy „soczewkę magnetyczną” utworzoną z dwu szyn żelaznych z uzwojeniem zasilanym prądem stałym, ustawionych w ten sposób, ażeby

tworzyły zamknięty obwód strumienia indukcji magnetycznej. Widok tej „soczewki” w przekroju przedstawia rys. 16.

Valley (90), a następnie Valley i Rossi (91), opracowali metodę badań procesu spontanicznego rozpadu mezonów μ^- przy pomocy komory wilsonowskiej.



Rys. 16



Rys. 17

Rys. 17 przedstawia aparaturę użytą w tej pracy. Liczniki C_1 , C_2 , C_3 pracują w koincydencji i stanowią układ wprowadzający mezon do obszaru komory Wilsona (W) znajdującej się w polu magnetycznym elektromagnesu (H). Bloki ołowiane L_1 i L_2 eliminują składową miękką promieniowania kosmicznego. Oprócz filtrów ołowianych komora otoczona jest filtrami wodnymi I_1 i I_2 umieszczonymi w celu precyzyjniejszego wyznaczenia zakresu pędów badanych mezonów. S oznacza materiał absorpcyjny, D — zespół 16 liczników pracujących w zapóźnieniu względem C . Impulsy z liczników D przechodzące w przedziale czasowym dłuższym od $1 \mu\text{sek.}$ po impulsie koincydencji ($C_1 C_2 C_3$) wyzwalają ekspansję komory i układ fotografujący.

Ponieważ kierunek zakrzywienia toru mezonu przez pole magnetyczne rozstrzyga definitywnie sprawę znaku ładunku mezonowego, metoda ta daje wyniki jakościowo bezbłędne, odznacza się jednak małą wydajnością²¹⁾.

Pierwsze pomiary (Valley (l. c)) wykonane dla rozpadu μ^- w węglu, wodzie, berylu, stali i mosiądzu wykazały, że w pierwszych trzech spontaniczny rozpad ujemnego mezonu występuje, natomiast w dwu pozostałych ośrodkach nie występuje. Po udosko-

²¹⁾ Porównaj rozdz. I d,

nalaniu układu rejestrującego udało się wyznaczyć średni czas życia mezonów rozpadających się w duraluminie (98% Al). Znaleziono $t_0^- = (0,74 \pm 0,17)$ sek.

W opisanym wyżej zachowaniu się mezonu ujemnego μ^- uderzające są dwie właściwości: 1. wbrew teoretycznym przewidywaniom odnoszącym się do ykonu mezon ujemny może ulec rozpadowi przed pochwycciem go przez jądro atomowe i 2. pochwycony mezon nie daje przewidywanych przez teorię (Wheeler (96)) pobudzeń chwytającego jądra atomowego, na co uwagę zwrócili jeszcze w 1940 r. Migdał i Pomeranczuk (Мигдал, Померанчук (l. c)).

Szereg prac przeprowadzanych techniką kliszową (Occhialini, Powell (I/50), Lattes et al. (I/42), Brown et al. (I/15.16), Franzinetti (54)) wykazało, że mezony μ albo kończą swój bieg bez żadnego wyraźnego śladu cząstek wtórnych na końcu toru (odnosi się to prawdopodobnie do mezonów ujemnych); albo też tor mezonu kończy się śladem elektronu wyrzuconego wskutek samorzutnego rozpadu (ma to miejsce prawdopodobnie wyłącznie dla mezonów μ^+). Nie wykryto natomiast mimo ogromnego materiału doświadczalnego żadnych śladów cząstek emitowanych przez jądra absorbujące. Kilka prac poświęcono rozstrzygnięciu pytania, czy fakt bardzo słabego pobudzenia jądra po pochwycciu mezonu ujemnego przez jądro nie da się wyjaśnić procesem rozpadu mezonu na elektron i foton, jeszcze przed aktem absorpcji. Wykonane w związku z tym doświadczenia (Hicks, Pontecorvo (41), Sard, Althaus (75), Sard (74)), wykazały ponad wszelką wątpliwość, że w procesie rozpadu ewtl. chwytania mezonu przez jądro nie są emitowane fotony o energiach większych niż ok. 15 MeV — tak że hipoteza ta musi być odrzucona.

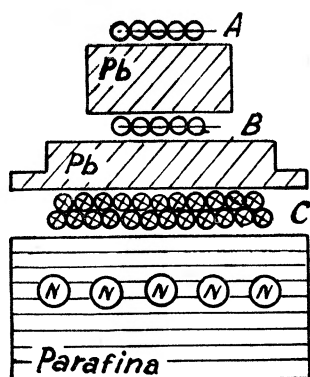
Zagadnieniu emisji neutronów w związku z procesem chwytania mezonów przez jądro atomowe poświęcone były prace Groetzinger'a i Clure'a (39) oraz Sarda i współpracowników (76). Obie prace dały wyniki pozytywne.

Aparatura używana przez grupę Sarda (rys. 18) składa się z teleskopu koincydencyjnego AB, przedzielonego 12,7 cm ołowiu, absorbenta (7 cm ołowiu), oraz układu liczników antykoincydencyjnych C. Poniżej tego układu umieszczone są w dużym bloku parafinowym liczniki neutronowe²²⁾. Układ rejestrujący pozwalał

²²⁾ Katody tych liczników pokryte są borem o dużej zawartości B¹⁰. Wskutek reakcji jądrowej B¹⁰ + n → Li⁷ + α zostaje zapoczątkowane wyładowanie w liczniku.

notować koincydencje (AB), antykoincydencje ($AB-C$), impulsy neutronowe (N) i antykoincydencje zapóźnione ($AB-C:N$), przy czym zapóźnienie impulsu z liczników N mogło wynosić od 4 do 84μ sek. (Wielkie stosunkowo zapóźnienie tłumaczy się tym, że średni czas życia szybkiego neutronu, zwalnianego do prędkości termicznych, a następnie chwytanego w liczniku, jest rzędu 15μ sek).

Różnica liczby impulsów ($AB-C$) aparatury pracującej bez płyty absorpcyjnej (7 cm ołowiu) oraz ($AB-C$) aparatury pracującej z absorbentem daje liczbę mezonów zatrzymanych w absorbencie. Wynosiła ona w tej pracy $0,86 \text{ min.}^{-1}$. Różnica liczby impulsów

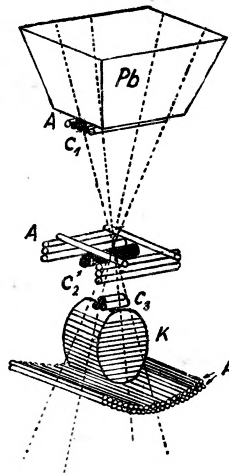


Rys. 18

($AB-C:N$) bez żadnych zmian w aparaturze oraz ($AB-C:N$), po otoczeniu liczników N kadmem dawała liczbę $N_n = (0,34 \pm 0,04) \text{ godz.}^{-1}$, stanowiącą liczbę zatrzymanych w licznikach N neutronów. Dodatkowe pomiary eliminujące ewtl. rozładowania liczników N przez przypadkowe cząstki przenikliwe pozwalały upewnić się, że liczba ta istotnie obrazuje częstość wytwarzania neutronów wskutek procesu chwywania mezonów μ^- . Bardzo stosunkowo mała liczba zarejestrowanych neutronów pochodzi stąd, że użyta aparatura posiadała bardzo małą wydajność rzędu kilku procent. Po uwzględnieniu wydajności aparatury można sądzić, że prawie każdy akt absorpcji mezonu ujemnego przez jądro wiąże się z emisją neutronu. Odrzuty jąder spowodowane emisją neutronów obserwowali Blau, Bloch, Friedeman i Nafe (porównaj Dilworth, Page (28)).

Dla precyzyjnego prześledzenia mechanizmu absorpcji mezonu i efektów wtórnych związanych z absorpcją w różnych materiałach,

oraz ewtl. roztrzygnięcia pytania, czy z aktem absorpcji mezonu μ^- nie łączy się emisja protonu, Chang (19) posłużył się aparaturą przedstawioną na rys. 19. Wewnątrz komory Wilsona K umieszczono 10 folii metalowych. W pracy Changa używano folii glinowych o grubości 0,05 mm i 0,8 mm, ołowianych — 0,5 mm,



Rys. 19

żelaznych o grubości 0,7 mm. Komora sterowana była teleskopem C_1, C_2, C_3 . Osłonę stanowiły: blok ołowiany o grubości 30 cm i układ 42 liczników antykoincydencyjnych A .

Grubość folii dobrana była tak, ażeby wyrzucony ewtl. proton o niewielkiej energii nie był jeszcze absorbowany przez folię, ale przeszedł przynajmniej do następnej (przy folii glinowej 0,05 mm minimalna energia protonu konieczna do przejścia folii wynosiłaby zaledwie 2,2 MeV). Charakter cząstki, której tor obserwowano w komorze, można było określić opierając się na następujących kryteriach: 1) zmiana jonizacji wzdłuż toru przy przejściu płytek; 2) charakter rozproszenia kulombowskiego w płytkach; 3) częstość obserwowanych mezonów zatrzymywanych w płytkach musiała odpowiadać znanej skąd inąd wartości absorpcji składowej mezonowej w materiale stanowiącym przegrodę.

Wydajność aparatury Changa była bardzo mała. Zaledwie 2% uzyskanych zdjęć nadawało się do analizy. Częstość wykonywanych zdjęć wynosiła średnio 3 godz.⁻¹. Z analizy 80 zdjęć

obrazujących akt rozpadu lub absorpcji mezonu stwierdzono: 1) tylko w jednym przypadku absorpcji towarzyszyło wyrzucenie powolnego protonu (identyfikacja protonu nie była tu zupełnie pewna); 2) ani w akcie absorpcji, ani rozpadu nie stwierdzono emisji fotonów o energiach większych od 20 MeV²³); 3) aktowi absorpcji towarzyszy często generacja fotonu o energii mniejszej niż 5 MeV (co do źródła tego fotonu patrz paragraf następny).

Również metoda liczników scyntylacyjnych stosowana w pracy Voorhiesa i Streeta (92) wykazała, że z absorpcją mezonu μ^- nie wiąże się silniejsze pobudzenie jądra.

Wymienieni autorzy używali metody, w której mezony powolne, zatrzymywane w kryształach $AgCl$, dawały impulsy prądu; wielkość i kształt impulsów można było ściśle określić. Ponieważ wielkość impulsu dawanego przez licznik scyntylacyjny jest proporcjonalna do straty energii cząstki jonizującej w kryształach, autorzy mogli stwierdzić nie tylko fakt rozpadu mezonu μ^- , ale ponadto brak ciężkich cząstek wyrzucanych przez jądra w 263 zbadanych wypadkach absorpcji μ^- .

f) Teoria rozpadu i chwywania mezonu μ^-

Przytoczone w paragrafie poprzednim fakty doświadczalne, obrazujące nikły stopień pobudzenia jądra atomowego po absorpcji mezonu powolnego, stoją w jaskrawej sprzeczności z przewidywaniami teoretycznymi własności Yukonu (Wheeler (97), por. też rozdział III).

Również prawdopodobieństwo pochwylenia mezonu powolnego przez jądro atomowe jest bez porównania mniejsze niż wynikałoby to z teorii Yukawy.

Rozważania teoretyczne (Fermi, Teller, Weisskopf (29)) okazują, że mezon ujemny musiałby po zatrzymaniu się w dowolnym absorbencie spaść na mezonową orbitę K w czasie rzędu $10^{-9} - 10^{-13}$ sek. (w zależności od stanu skupienia materiału absorbującego), a więc znikomo krótkim wobec średniego czasu życia mezonu (10^{-3} sek.). Mezon znajdujący się na orbicie K może albo ulec spontanicznemu rozpadowi z prawdopodobieństwem

$$\Lambda = 1/t_0 \quad (t_0 = 2,0 \mu \text{ sek.}), \quad (\text{II-30})$$

²³) W pobliżu miejsca znikania mezonów Chang nie obserwował ani elektronów Comptonowskich, ani też par, co było według autora dostatecznym argumentem na stwierdzenie zawarte w punkcie 2.

albo też zostanie pochwycony przez jądro z prawdopodobieństwem $\lambda = 1/t_c$. Sumaryczne prawdopodobieństwo zniknięcia mezonu z orbity K będzie więc

$$\Lambda + \lambda = 1/t_0 + 1/t_c = 1/t^- \quad (\text{II-31})$$

We wzorze tym, jak widać, t^- oznacza średni czas życia mezonu μ^- na orbicie K .

Z bezpośrednich pomiarów uzyskuje się, jak widzieliśmy, na t^- wartości rzędu $1 - 0,5 \mu$ sek., przy zatrzymaniu się mezonu μ^- w materiałach o niskich numerach porządkowych Z . Ponieważ z drugiej strony $t_0 = 2 \mu$ sek., przeto

$$\lambda = 1/t_c \simeq \frac{1}{10^{-6}} - \frac{1}{2 \cdot 10^{-3}} = 0,5 \cdot 10^6, \quad (\text{II-32})$$

a w każdym bądź razie nie przekracza wartości rzędu 10^6 . Tymczasem teoria yukonu prowadzi do wartości na $\lambda = 1/t_c = 10^{18}$, a więc do wartości różniących się o 12 rzędów wielkości!

Wzór (II-31) pozwoli przeprowadzić ocenę liczby N_r^- elektronów rozpadowych, powstających przy rozpadzie liczby N_0^- zatrzymanych w jakimś absorbencie mezonów μ^- zarejestrowanych przez aparaturę oraz umożliwi zbadanie prawa rządzącego rozpadem mezonów ujemnych. Można okazać (Ticho, Schein (87)), że prawo to jest prawem wykładniczego zaniku, a liczba elektronów rozpadowych po upływie czasu dłuższego od t wynosi

$$N_r^- = N_0^- \frac{\lambda}{\lambda + \Lambda} \cdot e^{-(\Lambda + \lambda)t} \quad (\text{II-33})$$

Z drugiej strony liczba zarejestrowanych po tym samym czasie elektronów rozpadowych (pozytonów) pochodzących od mezonów dodatnich μ^+ wynosi

$$N_r^+ = N_0^+ \cdot e^{-\Lambda t} \quad (\text{II-34})$$

Dla $t=0$ otrzymujemy na stosunek liczby pozytonów do negatonów rozpadowych

$$N_r^+ / N_r^- = (\Lambda + \lambda) / \lambda \cdot N_0^+ / N_0^- \quad (\text{II-35})$$

Z prac związanych z wyznaczaniem średniego czasu życia mezonu (Rassetti (l. c.), Conversi, Piccioni (l. c.)) wynikał stosunek liczb zatrzymanych w absorbencie mezonów róż-

nych znaków $N_0^+/N_0^- = 1,3$; mierząc więc N_r^+/N_r^- i znając wartość Λ (II-30) możemy bezpośrednio wyznaczyć całkowite prawdopodobieństwo $(\lambda + \Lambda)$ zniknięcia mezonu μ^- z orbity K , a więc i t_c^- .

Mierząc z kolei dla różnych substancji t_c można wyznaczyć zależność prawdopodobieństwa pochwylenia mezonu przez jądro atomowe od Z absorbenta. Zależność tę wyznaczył na drodze teoretycznej *Wheeler* (97).

Wheeler zwrócił uwagę na to że pomimo braku poprawnej teorii mezonu μ , która byłaby w stanie opisać zachowanie się mezonu μ^- w pobliżu jądra atomowego, a w szczególności zachowanie się mezonu ujemnego po pochwyleniu go przez jądro atomowe, można jednak na innej drodze uzyskać cały szereg informacji dotyczących zachowania się mezonu we wspomnianych warunkach.

Według *Wheeler*a doniosłą rolę w procesie chwytania i rozpadu odgrywają siły pola elektromagnetycznego. Zajął on usprawiedliwione z punktu widzenia wyników doświadczalnych stanowisko, że praktycznie biorąc jakiegoś specyficznego oddziaływania pomiędzy mezonem μ i jądrem (nukleonami) — nie ma. W tych warunkach główną rolę odgrywają siły kulombowskie utrzymujące mezony ujemne w quasi - bohrowskich stanach stacjonarnych i odpychające od jądra mezony dodatnie.

Wychodząc z najprostszych założeń elektrodynamiki klasycznej i teorii kwantów, *Wheeler* najpierw znajduje energię potencjalną mezonu w otoczeniu jądra w zależności od odległości mezonu względem środka jądra (r). Jeżeli $R = \frac{e^2}{2M \cdot c^2}$ oznacza promień jądra atomowego, to energia ta jest

$$\Phi = \frac{Ze^2}{R} (1,5 - 0,5r^2/R^2) \quad \text{dla } r \leq R, \quad (\text{II-36a})$$

$$\Phi = \frac{Ze^2}{r} \quad \text{dla } r \geq R, \quad (\text{II-36b})$$

co np. dla ołowiu daje zmianę energii potencjalnej od wartości 21,3 MeV dla $r = 0$, do wartości 14,2 MeV dla $r = R = 8,1 \cdot 10^{-13}$ cm.

Otrzymana wartość ma o tyle duże znaczenie teoretyczne, że pozwala na stosowanie wzorów nierelatywistycznych, a to ze względu na małą wartość Φ wobec energii spoczynkowej mezonu $\mu c^2 = 100$ MeV nawet dla najcięższych jąder.

Rozwiązanie problemu stanów stacjonarnych mezonu w polu kulombowskim jądra atomowego daje, podobnie jak dla atomu

Bohra, stany skwantowane, których termy posiadają postać zwy-
czajnych termów Rydberga

$$T_n = \frac{1}{2} \cdot c^2 \cdot \left(\frac{Z^2}{137} \right) \frac{1}{(n + \delta_0 + \delta_1/n)^2} \quad (\text{II-37})$$

We wzorze tym n jest główną liczbą kwantową stanu mezonowego; δ_0 i δ_1 poprawkami spowodowanymi występowaniem „efektu przesłonowego”²⁴⁾ (odnoszącego się do ładunku jądra, a nie elektronów, jak to ma miejsce w atomach normalnych — elektronowych) i relatywistyczną zmianą masy²⁵⁾.

Podstawiając wartości liczbowe we wzorze (II-37) otrzymuje się następujące wartości termów mezonowych dla niektórych pierwiastków.

Tablica III

Z	A	Pierw.	T (w MeV)		
			1s	2p	2s
8	16	O	0,173	0,044	0,043
16	32	S	0,672	0,175	0,172
35	80	Br	2,61	0,842	0,742
53	127	I	4,89	1,95	1,55
74	184	W	7,89	3,81	2,76
92	238	U	10,49	5,3	3,96

Jak okazuje analiza torów mezonowych już dla uranu mezon spędza około 50% czasu wewnątrz jądra atomowego. Dla jądra o dostatecznie dużych rozmiarach mezon będzie się poruszał cał-

²⁴⁾ Należy zwrócić uwagę na to, że w teorii atomu Bohra natężenie pola wypadkowego wzrasta w miarę zbliżania się do jądra — poprawka więc dla elektronu zanurzającego się w ładunku osłonowym idzie w kierunku zwiększenia energii termu, a więc zmniejszenia mianownika. Dla atomu mezonowego pole maleje przy zanurzeniu się mezonu do jądra i poprawka ma znak przeciwny.

Mechanika falowa daje na wartości stałych wzoru (II-37) wyrażenia

$$\delta_0 = - (Z/137)^2 (2L + 1) \text{ i } \delta_1 = 3/8 \cdot (Z/137)^2, \quad (\text{II-38a}) \quad (\text{II-39})$$

dla jąder lekkich, dla jąder natomiast cięższych $\delta_0 = 0,213 \cdot (Z/137)^2 \cdot A^{2/3}$. (II-38b)

²⁵⁾ Jak się okazuje, efekt przesłonowy elektronów atomowych, nie uwzględniony w teorii, mógłby odgrywać rolę tylko dla stanów wysokiego pobudzenia. Dla stanów najniższych natomiast rola tego efektu jest znikoma. Dla żelaza np. efekt ten zmieniłby energię termu o mniej niż 0,2% i jest, jak z tego widać, bez znaczenia.

kowiec wewnątrz jądra ze stałą częstością oscylacji podstawowej, niezależnie od wielkości jądra. W przypadku tym poziomy energetyczne będą oddzielone od siebie o 8,7 MeV.

Powracając do istniejących w rzeczywistości jąder należy zauważyć, że stan $2s$ nie może być stanem metatrwałym (jak to przeważnie ma miejsce dla zwykłych atomów) i przejście ze stanu $2s$ do stanu podstawowego może odbywać się zawsze poprzez pośredni energetycznie stan $2p$. Drugą osobliwością zamieszczonej tabeli jest (szczególnie dla ciężkich jąder) bardzo duża energia związana z przeskokiem mezonowym. Wyzwolona w ten sposób energia może być bądź to wyemitowana pod postacią kwantu γ , bądź też prowadzić do emisji elektronu w procesie Augera, bądź wreszcie prowadzić do powstania pary pozyton-negaton.

Wheeler podaje prawdopodobieństwa różnych procesów; okazuje się, że proces emisji γ zależy w różny sposób od numeru porządkowego jądra: dla przejścia $2p \rightarrow 1s$ prawdopodobieństwo (w) jest proporcjonalne do Z^4 , a dla procesu $2s \rightarrow 2p$ do $(\Delta E)^3/Z^2$, (jeżeli ΔE oznacza różnicę energii wchodzących w grę stanów); prawdopodobieństwo natomiast procesu Augera ma wartość stałą $2,55 \cdot 10^9 \text{ sek.}^{-1}$ ²⁶⁾. Dla procesu produkcji par otrzymuje się zależność typu $A(Z^2 - Z_1^2)^c Z^D$, gdzie A jest stałą, $Z_1 = 25$, $c = 5$ i $D = -1,5$. Liczbowe dane wskazują na to, że proces Augera odgrywa dominującą rolę dla jąder najlżejszych, kiedy mezon znajduje się w stanie $2s$. Od $Z = 15$ zaczyna jednak przeważać proces emisji γ z przeskoku $2s \rightarrow 2p$. Proces tworzenia się par może mieć miejsce tylko dla $Z > 25$; prawdopodobieństwo tego procesu wzrasta ze wzrostem Z , ale jest w stosunku do innych procesów małe. Przerachowując prawdopodobieństwa poszczególnych procesów na czas życia mezonu na poziomach $2s$ i $2p$ uzyskuje się wyniki świadczące o tym, że praktycznie każdy me-

²⁶⁾ Jakościowe potwierdzenie przewidywań teorii przyniosła praca Cosynsa Dilwortha, Occhialiniego, Schoenberga i Page'a (26). Autorzy ci okazali, że przy absorpcji jądrowej mezonu μ^- około 10% jąder emituje w procesie Augera powolne elektrony o energiach 10—50 keV.

Dilworth i Page (28) stwierdzili, że co najmniej 20% zatrzymanych mezonów μ^- emituje powolny elektron o energii około 20 keV. Elektrony te przypisuje się konwersji wewnętrznej γ .

zon musi spaść na najniższy stan mezonowy, zanim nastąpi rozpad naturalny.

Wheeler przerachowuje dalej prawdopodobieństwo λ absorpcji mezonu przez jądro mezonowe jako funkcję Z (nie wchodząc zresztą zupełnie w mechanizm tego procesu). Robi on najbardziej intuicyjnie usprawiedliwione założenie, że prawdopodobieństwo absorpcji wzrasta wraz z Z i z prawdopodobieństwem znalezienia się mezonu w bezpośrednim pobliżu protonu. Te proste założenia prowadzą do wyrażenia

$$\lambda = 1/t_0 \cdot (Z/Z_0)^4, \quad (\text{II-40})$$

gdzie Z_0 jest pewną stałą bezwymiarową, którą należy wyznaczyć doświadczalnie ²⁷⁾, $t_0 = 2,15 \cdot 10^{-6}$ sek. — jest średnim czasem życia mezonu swobodnego. Wzór ten słuszny jest dla jąder lekkich, dla ciężkich natomiast zamiast Z występuje ładunek efektywny jądra (Z_{ef}) o wartości

$$Z_{ef} = Z[1 + (Z/37)^{1.54}]^{-1/1.54}. \quad (\text{II-41})$$

Prawdopodobieństwo znikania mezonu z orbity K , czy to wskutek rozpadu, czy też wskutek absorpcji jądrowej przyjmuje więc zgodnie z (II-31) postać

$$1/t^- = 1/t_0 + 1/t_0 \cdot (Z_{ef}/Z_0)^4, \quad (\text{II-42})$$

skąd średni czas życia mezonu ujemnego

$$t^- = \frac{t_0}{1 + (Z_{ef}/Z_0)^4}. \quad (\text{II-43})$$

Szansa obserwacji elektronu rozpadowego będzie wobec tego

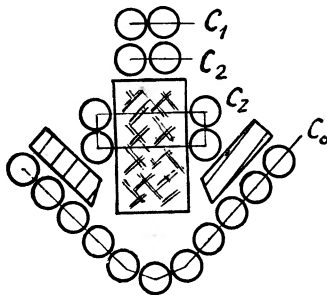
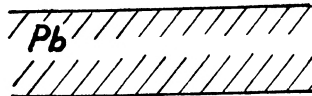
$$\lambda_r = t^-/t_0 = (1 + Z_{ef}^4/Z_0^4)^{-1}. \quad (\text{II-44})$$

W zamieszczonej poniżej tabeli (tab. IV) podane są wartości t^- i λ_r dla różnych pierwiastków przy dwu różnych wartościach stałej Z_0 .

²⁷⁾ Stała ta wyobraża ładunek takiego idealnego jądra, dla którego prawdopodobieństwo rozpadu mezonu = prawdopodobieństwu schwywania mezonu przez jądro atomowe.

Tabela IV

Pierw.	Z	Z_{ef}	$Z_0 = 10$		$Z_0 = 7$	
			$t \mu \text{sek}$	λ_r	$t \mu \text{sek}$	λ_r
Be	4	3,925	2,10	0,977	1,95	0,910
C	6	5,78	1,95	0,899	1,47	0,682
O	8	7,56	1,62	0,764	0,91	0,425
Al	13	11,48	0,77	0,358	0,25	0,118
S	16	13,70	0,48	0,221	0,137	0,064
Fe	26	19,40	0,142	0,066	0,036	0,017
Pb	82	31,5	0,022	0,010	0,005	0,002
U	92	32,17	0,020	0,009	0,005	0,002

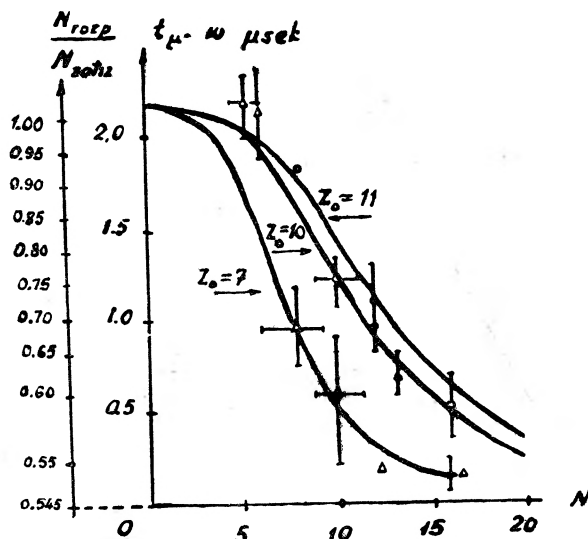


Rys. 20

Sigurgeirsson i Yamakawa (82) wykonali pracę, której celem było doświadczalne sprawdzenie wzoru (II-44) oraz określenie stałej Z_0 . Schemat aparatury użytej w tej pracy przedstawia rys. 20. Układ wyzwalający składa się z dwu par liczników C_1 i C_2 . Koincydencja (C_1 , C_2) otwiera układ rejestrujący czas. Układ ten zapisuje liczbę oscylacji generatora wysokiej częstotliwości (4Mhz) sprzężonego z układem rejestrującym impulsy w taki sposób, że rejestracja rozpoczyna się z chwilą pojawienia się impulsu wyzwalającego — (C_1 , C_2), a kończy się albo automatycznie po 16 μsek . od chwili otwarcia układu rejestrującego, albo z chwilą pojawienia się impulsu w licznikach C_z . Osobno rejestrowane są koincydencje (C_z , C_0) służące do eliminacji przypadkowych impulsów zapóźnionych C_z i do obliczenia liczby

przypadkowych impulsów C_z w przypadku, kiedy impulsowi C_z nie towarzyszą impulsy C_0 .

Opisana metoda posiada ten zasadniczy brak, że rejestracji podlegają zarówno ujemne jak i dodatnie elektrony rozpadowe, co powoduje zmniejszenie dokładności pomiarów dotyczących tylko mezonu ujemnego. Brak ten zostaje jednak wyrównany tym, że liczba rejestracji rozpadających się mezonów wielokrotnie przewyższa liczbę rejestracji, jakie otrzymuje się przy użyciu separacji magnetycznej.



Rys. 21

Autorzy przeprowadzili pomiary używając jako absorbentów Be, B_4C , C, TaF, Mg, S. Wyniki uzyskane w tej pracy wraz z krzywymi wynikającymi z teorii Wheelera podane są na wykresie (rys. 21). Stosunek liczby elektronów rozpadowych pochodzących z rozpadu mezonów obu znaków do liczby zatrzymanych mezonów podany jest jako funkcja Z absorbenta. Krzywe ciągle przeprowadzone są zgodnie z wzorem (II-43)²⁸.

Rozkład punktów doświadczalnych uzyskanych w tej pracy (oznaczonych krzyżykami) pokrywa się na ogół z przewidywaniami teorii dla $Z_0 = 10$. Należy jednak zwrócić uwagę na to, że rzędne wszystkich punktów doświadczalnych uzyskanych w tej pra-

²⁸ Wartości λ_r uzyskuje się dodając do λ_r (tab. V) wartość stałą odpowiadającą stosunkowi liczby mezonów dodatnich do całkowitej liczby mezonów $n^+/(n^+ + n^-) = 6/11$.

cy wyznaczone są jedynie jako wielkości względne. Większą precyzją odznaczają się punkty doświadczalne (oznaczone kółkami) uzyskane przez innych autorów (Ticho, Schein (l. c.) Valley, Rossi (l. c.)), stosujących metodę separacji mezonów różnych znaków.

Opisana wyżej teoria Wheelera, ujmująca ilościowo zależność prawdopodobieństwa rozpadu mezonu μ od numeru porządkowego Z absorbenta, nie mówi jeszcze nic o procesie zachodzącym w jądrze atomowym po pochyceniu mezonu. Jak podkreślaliśmy w rozdziale poprzednim, aktowi absorpcji towarzyszy, wbrew przewidywaniom teoretycznym odnoszącym się do yukonu, tylko bardzo nieznaczne pobudzenie jądra atomowego, mające jako skutek emisję jednego neutronu lub ewtl. powolnego protonu.

W związku z tym wysunięto cały szereg przypuszczeń usiłujących wyjaśnić wspomniany brak pobudzenia i nikłe prawdopodobieństwo chwytania mezonu ujemnego przez jądra atomowe. W koncepcjach tych rezygnuje się z tych lub innych założeń oryginalnej teorii Yukawy.

Jedną z takich prób była próba ujęcia rozpadu mezonu μ na foton i elektron o energiach 50 MeV każdy (Pontecorvo (63)). Jak widzieliśmy, dane doświadczalne (Hinks, Pontecorvo (41), Sard, Althaus (75)) nie potwierdziły tej interpretacji.

Inna próba wyjaśnienia zachowania się jądra po absorpcji mezonu μ^- opiera się na przypuszczeniu, że tylko para mezonów μ^+ i μ^- posiada wiązanie z jądrem atomowym (Weisskopf (94) Лебедев, Марков (50)). W myśl tej teorii mezon ujemny mógłby być absorbowany tylko z równoczesną emisją mezonu obojętnego elektrycznie. Ponieważ jednak pomiędzy energiami jądra absorbującego (Z) i powstającego izobaru ($Z-1$) mogą istnieć różne różnice mas, zależnie od wartości Z i A , absorpcja taka nie zawsze jest możliwa. Dla Fe wspomniana różnica wynosi 4,2 MeV i może być pokryta różnicą mas $\mu^- - \mu^0$, dla węgla natomiast wynosi 14,6 MeV i różnica $\mu^- - \mu^0$ może być nie wystarczająca dla przejścia $Z \rightarrow Z-1$, połączonego z absorpcją μ^- i emisją μ^0 .

W myśl tej hipotezy mezony ujemne winny być absorbowane w B^{10} oraz N^{14} . Dane doświadczalne (Nerson (56)) nie potwierdziły jednak przewidywanych efektów.

Weisskopf (96) tłumaczył słabość wiązania mezonu w jądrze, a w związku z tym mały przekrój czynny jądra na chwytanie mezonu, hipotezą zakładającą, że protony promieniowania pierwotnego wprowadzają jądro w stan specyficznego „pobudzenia“,

przy którym istnieje możliwość emisji mezonu. Jeżeli przyjmie się, że taki stan jądra może trwać dość długo, to równocześnie uzyska się wyjaśnienie słabego oddziaływania mezonu μ na jądro atomowe. Chodzi tu o to, że teoria procesów elementarnych prowadzi do wniosku, iż przekrój czynny jąder na procesy wywoływane przez mezony musi być rzędu przekroju czynnego produkcji mezonów. Jeśli się przyjmie, że mezony μ są wytwarzane przez pierwotne promieniowanie kosmiczne (pochłaniane z dużym stosunkowo przekrojem czynnym — rzędu rozmiarów geometrycznych jąder), to fakt, że przekrój czynny jąder na procesy wywołane przez mezony jest bardzo mały, wskazuje na to, że proces generacji mezonu nie jest procesem elementarnym, ale procesem złożonym z kilku sukcesywnych procesów elementarnych. Otóż jeżeli jeden z tych procesów jest bardzo powolny w porównaniu z procesem inicjującym, to całkowity proces będzie praktycznie nieodwracalny i odpowiednie przekroje czynne procesów generacji i absorpcji — będą zupełnie różne. Pierwszym procesem elementarnym według Weiskopfa byłoby specjalnego typu „pobudzenie“ jądra, drugim — emisja mezonu.

Inną koncepcję podobnego typu dał Marshak. W myśl tej koncepcji promieniowanie pierwotne wytwarza mezon innego typu, który po stosunkowo (w stosunku do procesu zderzenia) dość długim czasie życia rozpada się na mezon μ , i jakąś inną cząstkę. Podobną koncepcję dwu mezonów związanych genetycznie wysunęli w związku z odkryciem mezonu π ²⁹⁾ Lattes, Occhialini i Powell (49). Teoretyczne rozwinięcie hipotezy Marshaka dla przypadku dwu mezonów dali Marshak i Bethe (53). W myśl tej koncepcji istnieją dwa mezony: cięższy, odpowiedzialny za siły jądrowe — yukon (Y), produkowany z dużym przekrojem czynnym w górnych warstwach atmosfery (dziś należałoby powiedzieć mezon π) i lżejszy mezon μ powstający jako produkt spontanicznego rozpadu Y i wykazujący bardzo słabe oddziaływanie na nukleony.

Według autorów tych generacja mezonu μ wiąże się z dwoma aktami elementarnymi. Np. (jeśli spin yukonu $s_Y=0$, a mezonu μ $s_\mu=1/2$)³⁰⁾

²⁹⁾ Co do słuszności i uzasadnienia tych koncepcji porównaj rozdział III.

³⁰⁾ W oryginale cytowany jest przykład procesu z $s_Y=1/2$ oraz $s_\mu=0$. W świetle obecnego materiału doświadczalnego lepszą ilustrację dają wzory zamieszczone w tekście. Odpowiednie przejścia oryginalnego przykładu są



$$n \rightarrow p + Y \quad (\text{II-45a})$$

$$\text{oraz } Y \rightarrow \mu + \nu. \quad (\text{II-46a})$$

ν oznacza tu neutrino, traktowane jako cząstka o zerowej masie spoczynkowej. Wzory te pozwalają wyliczyć prawdopodobieństwo odwrotnego procesu

$$p + \mu \rightarrow p + Y + \nu \rightarrow n + \nu. \quad (\text{II-47a})$$

Teoria daje na wspomniane prawdopodobieństwo przybliżony wzór

$$1/t_c = 1/t_Y \cdot (m_Y c^2 / M c^2) \cdot (M / \Delta m)^2 \cdot \bar{U} / m_Y c^2 \cdot v / c. \quad (\text{II-48})$$

We wzorze tym M oznacza masę protonu, m_Y — yukonu, $\Delta m = m_Y - m_\mu$, v — końcową prędkość yukonu, t_Y średni czas życia yukonu \bar{U} zaś (≈ 5 MeV) jest wartością elementu macierzy energii oddziaływania pomiędzy dwoma nukleonami biorącymi udział w akcie wymiany pędu.

Ponieważ t_c może być zmierzone doświadczalnie (patrz wyżej np. wzór (II-32) i dalsze uwagi), można bezpośrednio porównać dane doświadczalne z przewidywaniami teoretycznymi. Przewidywana przez teorię wartość dla $Z=Z_0=10$, a mianowicie $-t_c = 10^{-7}$ sek. przy $t_Y = 10^{-8}$ sek., jest zadowalająca. (Co do wartości t_Y porównaj IIIc).

Wspomniane wyżej teorie produkcji mezonów μ jako efektu kilku procesów sukcesywnych wyjaśniają jedynie małe prawdopodobieństwo chwytania mezonów pozostawiając na uboczu wyjaśnienie kwestii słabego pobudzenia jądra.

Zagadnieniem tym zajęli się Wheeler i Tiomno (98, 99). Jak widzieliśmy z poprzednio przytoczonych faktów doświadczalnych, dotyczących pobudzenia jądra atomowego, energia spoczynkowa pochwyconego mezonu μ^- nie zostaje zużyta ani na pobudzenie jądra, ani też nie zostaje przekazana w całości, np. elektronowi rozpadowemu. Istotnie, ani prace prowadzone techniką kliszową, ani techniką komory wilsonowskiej nie wykazują istnienia takich elektronów. Nie wytrzymuje również krytyki przypuszczenie, że mezon zostaje „zmagazynowany” w jądrze atomowym na dłuższy okres czasu. Działanie pola wewnątrz jądrowego powinno by się raczej przyczynić do przyspieszenia procesu rozpadu (porównaj Rossi (69), a nie zapóźnienia.

Valley (89) wygłosił wprawdzie przypuszczenie, że] szybszy rozpad μ^- może być wynikiem działania wymuszającego pola jądrowego. Jednak prace Ticho i Scheina (l. c.) oraz Valleya i Rossiego (l. c.) przypuszczenia tego nie potwierdziły. Gdyby fakt zmiany t_0 przez pole wewnętrzne miał istotnie miejsce, stosunek N^+/N^- dla

wszystkich absorbentów musiałby być taki sam. Jak widzieliśmy jednak w rozdziale II d (porównaj tab. II), doświadczenie wykazało co innego.

W świetle faktów doświadczalnych należy więc przyjąć, że: 1) mezon μ ulega rozpadowi w jądrze atomowym; 2) ładunek elektryczny mezonu zostaje zatrzymany przez jądro; 3) produktem rozpadu mezonu jest cząstka neutralna zabierająca z sobą niemal całą energię spoczynkową mezonu (μc^2); 4) tylko drobna część tej energii zostaje przekazana jądru.

Opierając się na wymienionych założeniach Wheeler i Tiomno (98) rozpatrują reakcję wymiany ładunku przebiegającą według schematu



gdzie μ^0 oznacza mezon obojętny lub neutrino. Pozostałe symbole, jak wyżej.

Opierając się na analogii z procesem rozpadu β^+ (wzór I-3), który może być napisany również w postaci



autorzy przypisują obu mezonom spin połówkowy i piszą hamiltonian oddziaływania w formie

$$H = g^+ O_{N\mu} (\tau_N \tau_\mu + \tau_N^* \tau_\mu^*) \delta(x_N - x_\mu), \quad (\text{II-51})$$

przy czym wskaźniki N odnoszą się do nukleonów, a μ do mezonów; operatory τ_N oraz τ_N^* odnoszą się do transformacji $N \rightleftharpoons p$, operatory τ_μ , τ_μ^* do transformacji $\mu^+ \rightleftharpoons \mu^0$. Operator $O_{N\mu}$ jest relatywistycznie niezmienniczą kombinacją operatorów Diraca dla pola nukleonowo-mezonowego; g^+ — oznacza stałą wiązania o wymiarze $\text{erg} \cdot \text{cm}^3$ (porównaj wzór I-12a), której wartość musi być wyznaczona na drodze doświadczalnej.

Teoria pozwala wyznaczyć prawdopodobieństwo reakcji (II-49) dla pojedynczego nukleonu. Otrzymuje się tu związek

$$\lambda_N = 190 (g^+ / 10^{-49} \text{ erg} \cdot \text{cm}^3)^2. \quad (\text{II-52})$$

Z drugiej strony teoria chwytania mezonu daje na prawdopodobieństwo chwytania mezonu przez pojedynczy nukleon (proton) według wzoru (II 40) wyrażenie

$$\lambda = 1/t_0 \cdot 1/Z_0^4. \quad (\text{II-53})$$

Ponieważ proces chwytania musi prowadzić do reakcji wymiany i $Z_0 \cong 10$, otrzymuje się przez porównanie (II-52) i (II-53) wyrażenie na g^+

$$g^+ = 0,5 \cdot 10^{-19} \text{ erg. cm}^3. \quad (\text{II-54})$$

Ta pobieżna ocena przeprowadzona dla wodoru została w pracy rozszerzona na trzy ogólniejsze przypadki różnych modeli jąder.

We wszystkich rozważanych w pracy przypadkach autorzy uzyskali na g^+ wartość rzędu $10^{-49} \text{ erg. cm}^3$. Uderzający jest tu fakt, że g^+ jest tego samego rzędu co stała g rozpadu β .

Niezależnie od rodzaju użytego do rozważań teoretycznych modelu jądra uzyskuje się na pobudzenie jądra związane z procesem (II-49) energię znacznie mniejszą niż μc^2 , a mianowicie energię pobudzenia rzędu 10 MeV. To słabe pobudzenie wyjaśniałoby cały szereg obserwowanych zjawisk towarzyszących absorpcji mezonu μ^- . Dla jąder ciężkich, dla których bariera potencjału wynosi 10—15 MeV, prawdopodobieństwo emisji protonu przy pobudzeniu jądra energią uwolnioną w procesie wymiany ładunku byłoby znacznie mniejsze niż prawdopodobieństwo emisji neutronu. Dla jąder lżejszych natomiast prawdopodobieństwa emisji protonu i neutronu byłyby porównywalne.

g) Rozpad β i spin mezonu μ

W rozdziale Ic zwracaliśmy uwagę na to, że teoria sił jądrowych Yukawa, wprowadzająca kwant pola sił jądrowych — yukon, narzucała mu automatycznie wartość spinu, który musiałby posiadać wartości całkowite lub 0.

Istnieją wprawdzie teoretyczne możliwości zbudowania takiej teorii sił jądrowych, w której cząstki reprezentujące kwanty pola sił jądrowych byłyby obdarzone spinem połówkowym, ale koncepcje tego rodzaju muszą z konieczności (prawo zachowania połówkowego spinu w obu stanach pobudzenia nukleonu) tłumaczyć wiązanie pomiędzy nukleonami równoczesną wymianą pary takich cząstek. Teorie tego typu muszą rezygnować z zasadniczego uproszczenia, jakie wprowadził Yukawa zastępując problem czterech ciał charakteryzujący teorię rozpadu β Fermiego, a mianowicie $p \rightarrow n + e^+ + \nu$, prostszymi problemami trzech ciał: $p \rightarrow n + Y^+$ i $Y^+ \rightarrow e^+ + \nu$.

Ponieważ zarówno natężenie sił jądrowych, jako też cały szereg własności yukonu (mezonu sił jądrowych), np. energia oddziały-

wania nukleonu i yukonu, przekrój czynny nukleonu na chwyta-
nie powolnych i rozpraszanie szybkich yukonów, produkcja yuko-
nów przy zderzeniu nukleonów i fotonów z jądrami itd., zależą
bezpośrednio od wartości spinu, znajomość spinów mezonów,
a w szczególności mezonu μ , posiada podstawowe znaczenie.

Z okoliczności występowania mezonu μ tylko w promieniowaniu
kosmicznym wynika, że bezpośrednio określenie jego spinu jest
praktycznie niemożliwe. Należy przeto oprzeć się na badaniu
zjawisk, których występowanie (jakościowe lub ilościowe) wiąże
się pośrednio z wielkością spinu mezonu. Trzeba tu jednak wy-
kluczyć wszelkie zjawiska, przy których mogłyby wchodzić w grę
siły specyficznie jądrowe, a to ze względu na to, że 1) nie można
a priori przyjąć teorii yukonu wraz ze wszystkimi jej później-
szymi modyfikacjami jako rzeczywiście poprawnej i 2) nie mamy
dostatecznych podstaw na to, ażeby pomimo pewnych podobieństw
pomiędzy własnościami mezonu i yukonu (średni czas życia, masa)
identyfikować te dwie cząstki; natomiast przeciwnie, fakt rozpadu
mezonu μ^- przed pochyceniem go przez lekkie jądra i bardzo
słabe pobudzenie jąder po absorpcji mezonu μ^- — przemawiają
bardzo wyraźnie na niekorzyść identyfikacji mezonu μ z yukonem.

Z wymienionych powodów musimy oprzeć się na takich zja-
wiskach, których występowanie wiąże się z faktem posiadania
przez mezon μ ładunku elektrycznego, a więc z oddziaływaniem
elektromagnetycznym pomiędzy jądrem i mezonem.

Jednym z niewielu zjawisk spełniających wyżej wymienione
warunki są ulewy elektronowo-fotonowe promieniowania kosmicz-
nego objawiające się uderzeniami prądu komory jonizacyjnej³¹⁾.

Prace związane z badaniem ulew tego typu (S c h e i n, Gill (77))
wykazują, że częstość (b) uderzeń w komorze jonizacyjnej, odpo-

³¹⁾ Ulewy promieniowania kosmicznego mogą powstawać na skutek czysto
elektromagnetycznych oddziaływań jądra na szybki mezon μ . Na skutek oddziały-
wania pomiędzy ładunkiem mezonu i ładunkiem elektronu mezon może „wy-
bijać” z atomu elektronu o znacznych energiach (tzw. elektrony δ). Elektrony
te, jeśli posiadają dostatecznie duże energie, mogą dawać w procesie hamowania
kwanty γ , które z kolei tworzą pary itd., dopóki energie kwantów γ lub elektro-
nów nie spadną poniżej wartości, przy której dalsze wytwarzanie odpowiednio
par lub energicznych fotonów stanie się niemożliwe. Teoria ulew tego typu,
tzw. jonizacyjnych, pokazuje, że ulewy takie zawierają średnio około 10 cząstek. Są
to więc ulewy małe.

Drugim procesem prowadzącym do straty energii mezonów, i wskutek zaha-
mowania mezonu do powstania ulew, jest emisja bardzo energicznych fotonów

wiadająca liczbie cząstek przewyższającej liczbę n , może być przedstawiona wzorem: $b(n) \simeq n^{-\lambda}$, przy czym dla $100 \leq n \leq 1.600$ $\lambda = 1,8 - 2$. Wg danych Weischedela (95) i Clay'a (24) liczba wielkich ulew pod absorbentem maleje wg prawa $l^{-\lambda}$ identycznego z prawem zaniku składowej przenikliwej ($\lambda \approx 2$, l - grubość warstwy absorpcyjnej). Okoliczność ta stanowi ważne potwierdzenie hipotezy o generacji ulew przez mezony μ .

Christy i Kusaka (20) obliczyli na drodze teoretycznej przekrój czynny mezonów o spinie 1 na tworzenie fotonów wskutek procesu hamowania mezonu w polu jądra i posługując się wcześniej wyliczonym przekrojem czynnym mezonów na tworzenie elektronów podali zależność pomiędzy liczbą cząstek w ulewach i częstością ich występowania pod dużymi głębokościami warstw absorbujących składową miękką.

Wyniki uzyskane przez tych autorów stoją w sprzeczności z danymi uzyskanymi na drodze doświadczalnej przez Scheina i Gilla (l. c.). Christy i Kusaka otrzymali na wykładnik potęgi wartość $\lambda = 1,5$ oraz wielkości bezwzględne za duże o czynnik rzędu 20 w stosunku do danych doświadczalnych.

Przy założeniu natomiast wartości spinu 0 lub $1/2$ przewidywania teoretyczne co do częstości występowania ulew o liczebności powyżej n cząstek pokrywają się z danymi doświadczalnymi ($\lambda = 1,8$ i ilościowa różnica o czynnik rzędu $1,5 - 3$).

Analiza wyników uzyskanych przez Christy i Kusaka przeprowadzona przez Bieleńkija (Беленький (8, 9) i wprowadzenie drobnych poprawek liczbowych pozwoliły wykazać, że dane doświadczalne wskazują na to, że spin mezonu μ równa się $1/2$ ³²).

w polu jądra. Energie tych fotonów mogą dochodzić do $10^{14} - 10^{18}$ eV (por. Cocconi (12)).

Fotony te powodują generację par o energiach tego samego rzędu wielkości i dalszy proces straty energii odbywa się wg schematu ulew jonizacyjnych.

Ulewy generowane przez foton odznaczają się ogromnymi rozmiarami (największe obserwowane „uderzenie“ w komorze jonizacyjnej zaobserwowane w Huancayo (Peru) odpowiadało równoczesnemu przejściu ponad 10.000 cząstek jonizujących przez objętość komory.) Teorię kaskadową ulew podali niezależnie od siebie Bhabha i Heitler (11) oraz Carlson i Oppenheimer (18) Porównaj też wyczerpujące artykuły w sprawie ulew Bieleńkija (8,9).

³²⁾ Autor odrzuca jednak tę wartość opierając się na przypuszczeniu, że mezon μ jest yukonem. Te same względy przemawiają wg autora za przyjęciem wartości 0 na jego spin (s_{μ}) pomimo to, że zgodność pomiędzy wynikami teorii i doświadczenia jest gorsza o czynnik rzędu 2. W świetle faktów cytowanych w dalszych częściach artykułu okazuje się jednak, że nie mezon μ , ale mezon π jest yukonem.

Zgodnie z koncepcją Yukawy yukon rozpada się spontanicznie na elektron i neutrino. Jeżeli rozpad ten ma miejsce dla yukonu spoczywającego, to całkowita energia wyzwolona w chwili rozpadu równa się różnicy pomiędzy energią spoczynkową yukonu (rzędu 100 MeV) a energią spoczynkową neutrino (znacznie mniejszą od 0,5 MeV lub w ogóle równą zeru).

Energia kinetyczna W_0 , jaką musiałyby zabrać z sobą powstające cząstki, musiałyby więc wynosić ok. 100 MeV, a rozkład jej pomiędzy elektronem i neutrino musi być uwarunkowany prawem zachowania pędu układu.

Ponieważ $p_e = p_\nu = p$ (dla mezonu spoczywającego) oraz ogólnie $(cp)^2 = E^2 - (mc^2)^2$, mamy na całkowitą energię

$$E_0 = E_e + E_\nu = \sqrt{c^2 p_e^2 + m_0^2 c^4} + \sqrt{c^2 p_\nu^2 + \nu^2 c^4}. \quad (\text{II-55})$$

Jeżeli $\nu = 0$, albo przynajmniej $\nu c^2 \ll cp$ (co napewno ma miejsce), to

$$E_0 = pc + c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} = \mu c^2, \quad (\text{II-56})$$

skąd

$$p_\nu c = E_\nu = W_\nu = \frac{(\mu^2 - m_0^2) c^2}{2\mu} = \text{const.} \quad (\text{II-57})$$

oraz

$$W_e \approx E_e = \mu c^2 - E_\nu = \frac{(\mu^2 + m_0^2) c^2}{2\mu} = \text{const.} \quad (\text{II-58})$$

Zważywszy, że $m_0 \ll \mu$, widzimy, że energie obu cząstek będą praktycznie sobie równe, a stała ich wartość będzie około 55 MeV.

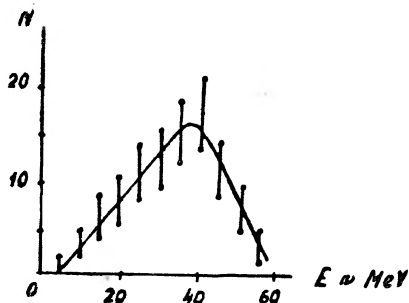
Istotnie, pierwsze oceny energii elektronów emitowanych w procesie rozpadu mezonu zdawały się potwierdzać przewidywaną stałą wartość energii emitowanych elektronów (por. Rossi (69)).

Jednakże w 1947 r. Adams, Anderson, Rau (2) uzyskali w komorze Wilsonowskiej fotografię mezonu, na której z pomiaru zakrzywienia toru elektronu rozpadowego można było z całą pewnością ocenić górną granicę energii elektronu, która wynosiła 24 MeV.

Dalsze prace związane z zagadnieniem energii emitowanego elektronu w rozpadzie μ (Anderson et al. (5), Thompson (86), Fowler, Cool, Street (33), Zar, Hershkowitz, Berezin (104), Steinberger (84), Hincks, Pontecorvo (41), Shamos, Russek (79), Brown et al. (I/15, 16)) wykazały, że przewidy-

wania teoretyczne odnoszące się do rozpadu mezonu μ wg schematu $\mu \rightarrow \nu + e$ z emisją elektronu o stałej energii około 55 MeV w zupełności nie potwierdzają się.

Leightonowi, Andersonowi i Seriffowi (78) udało się użyć na tyle obfity materiał doświadczalny dotyczący energii elektronów, że zrekonstruowali oni widmo energetyczne elektronów rozpadowych. Widmo to pokazuje rys. 22. Na osi odciętych odlo-



Rys. 22

żone są energie w MeV, a na osi rzędnych liczba znalezionych elektronów o energiach leżących w przedziałach co 10 MeV.

Aparatura, którą posługiwano się w tej pracy, składa się z komory wilsonowskiej sterowanej układem wyzwalającym ($C_1C_2 - C_3$). Licznik C_2 o grubości ścianek 0,87 mm wykonany z miedzi umieszczony był w płaszczu miedzianym 0,63 mm i stanowił warstwę absorpcyjną o łącznej grubości $2 \times (0,87 + 0,63) = 3$ mm. Ponadto wewnątrz komory znajdował się filtr grafitowy o grubości 29 cm.

Komora umieszczona była w polu magnetycznym o natężeniu indukcji $B = 7250$ gaussów. Średnica komory wynosiła 30 cm, głębokość 11 cm. Wypełnienie stanowił argon pod ciśnieniem 1,25 atm. i para nasycona mieszanki 35 % $H_2O + 65$ % alkoholu.

Z ogólnej liczby 1500 wykonanych zdjęć znaleziono i zmierzono energie 75 elektronów rozpadowych o energiach od 9 ± 2 MeV do $54,9 \pm 10$ MeV, w tym 41 pozytonów i 34 negatony.

Pomijając chwilowo interpretację uzyskanego wyniku należy zwrócić uwagę na to, że jeśli przyjmiemy, iż masa spoczynkowa emitowanych przy rozpadzie μ cząstek 'neutralnych' jest równa zeru, to z wartości $E_{\max} = 55 \pm 1$ MeV oraz z prawa zachowania

energii i pędu otrzymuje się na masę mezonu wartość $(217 \pm 4) m_0$, znajdującą się w znakomitej zgodności z bezpośrednimi pomiarami (por. § II b.)

Należy jeszcze zwrócić uwagę na fakt, że najczęściej spotykana energia (odpowiadająca maximum krzywej rozkładu) leży przy wartości $E \approx 34 \text{ MeV} = 2/3 E_{\text{max}}$ (rys. 22). Fakt ten sugeruje, że mezon ulega rozpadowi nie na dwie, jak przypuszczano pierwotnie ale na trzy cząstki. Jeżeli prawdopodobieństwo rozkładu energii pomiędzy te trzy cząstki jest symetryczne względem wszystkich cząstek, to istotnie winniśmy oczekiwać, że najczęstszym przypadkiem będzie taki, przy którym całkowita energia spoczynkowa uwolniona przez mezon — $E_0 = 110 \text{ MeV}$ — rozłoży się równomiernie pomiędzy wszystkie cząstki. Otrzymuje się więc na najbardziej prawdopodobną energię elektronu wartość $\bar{E}_e \approx \frac{E_0}{3} = 36 \text{ MeV}$, co, jak widać, pokrywa się (w granicach błędów doświadczalnych) z faktycznie znalezioną wartością.

Stwierdzona doświadczalnie górna granica energii kinetycznej elektronów rozpadowych $E_{\text{max}} = 55 \pm 1 \text{ MeV}$ pozwala też na ocenę górnej granicy masy cząstek neutralnych emitowanych przy rozpadzie. Przyjmując na masę mezonu górną granicę masy wyznaczoną doświadczalnie oraz górną granicę błędu popełnionego przy ocenie maksymalnej energii kinetycznej elektronu rozpadowego otrzymuje się, że suma mas cząstek neutralnych emitowanych przy rozpadzie mezonu $\Sigma m < 30 m_0$.

Nie przesądzając jeszcze sprawy co do charakteru cząstek emitowanych, ani też ich liczby, wynik doświadczenia przekreśla całkowicie hipotezę rozpadu mezonu μ na dwie tylko cząstki: elektron i neutrino, i stanowi poważny argument przeciwko całkowitemu spinu mezonu μ .

Bogaty materiał statystyczny potwierdzający ogólny wynik uzyskany przez Leightona, Andersona i Seriffa dała praca Żdanowa i Chajdarowa (Жданов, Хайдаров (105)), którzy badali globalny efekt absorpcji elektronów rozpadowych w różnych materiałach i udowodnili, że elektrony rozpadowe nie mogą mieć tych samych energii.

Zakładając, że rozpad przebiega wg schematu

$$\mu \rightarrow \mu^0 + e + \nu, \quad (\text{II-59})$$

autorzy ci znaleźli na wartość maksymalną energii emitowanego elektronu wyrażenie

$$E = \frac{mc^2}{2} \left[1 - \left(\frac{u^0}{u} \right)^2 \right]. \quad (\text{II-60})$$

skąd można było wyznaczyć masę μ^0 . Interpretacja wyników doświadczalnych pozwala określić granicę górną i dolną masy neutralnej cząstki emitowanej obok neutrino w procesie rozpadu mezonu, a mianowicie $0 \leq \mu^0 \leq 70 m_0$.

Klein (46) zwrócił uwagę na to, że rozpad mezonu μ może być traktowany jako prototyp rozpadu β Fermiego (I, b). Zbliżoną hipotezę wysunął znacznie wcześniej L. W. Nordheim (60), który opierając się na pracy Tamma i Bieleńkija (Тамм, Бельский (85)) nad całkowitym natężeniem składowej miękkiej w zależności od czasu życia mezonów i stosunku energii mezonu oddanej elektronom (δ) do energii oddanej fotonom doszedł do wniosku, że jedynym procesem mogącym wyjaśnić istniejące natężenie składowej miękkiej jest rozpad mezonu o spinie $1/2$ na elektron i dwa neutrino w procesie rozpadu β , albo też w niezbyt zrozumiałym procesie eksplozji mezonu.

Rozpad ten odbywałby się wg schematu (II-59), a „izobarem” powstającym po rozpadzie byłby mezon neutralny μ^0 . Kładąc próbnie na masę mezonu neutralnego wartości rzędu do $100 m_0$ można ocenić rząd wielkości całkowitej energii uwolnionej w procesie rozpadu β mezonu i znaleźć wartość funkcji Fermiego $f(\varepsilon)$ dla dziedziny odpowiadającej bardzo szybkim elektronom (wzór I-10a). Ponieważ τ znamy (I-11), a okres połowkowego rozpadu mezonu jest wielkością zmierzoną doświadczalnie, wzór (I-9) pozwala nam na jakościowe sprawdzenie poprawności hipotezy. Istotnie, uzyskany wynik leży w granicach dokładności stosowanych przy wyliczeniu wchodzących w grę wielkości i stanowi ważną wskazówkę na to, w jaki sposób należy podejść do problemu rozpadu mezonu μ .

Myśl Kleina podjęli Horowitz, Kofoed-Hansen i Lindhard (42), którzy po wprowadzeniu pewnych poprawek przy obliczeniu całkowitego prawdopodobieństwa emisji elektronu, wiążących się z odrzutem doznawanym przez jądro w momencie rozpadu β , porównali iloczyn $f(\varepsilon_0) \cdot \tau_{1/2}$ dla rozpadu β trytu (H^3) i rozpadu mezonu μ znajdując zgodność w granicy błędów doświadczalnych.

Szczegółową teorię rozpadu β mezonu μ o spinie połowkowym podali Wheeler i Tiomno (98). Autorzy ci opierając się na

przesłankach czysto fenomenologicznych przeprowadzili rachunki dla wszelkich możliwych typów wiązań w procesie rozpadu β według schematu (II-59), a więc typu skalarnego, pseudoskalarnego, wektorowego, pseudowektorowego i tensorowego, włączając w dyskusję przypadek $\mu^0 = \nu = 0$.

Godny podkreślenia jest fakt, że z wyjątkiem wiązania typu pseudoskalarnego wszystkie inne rodzaje wiązań dają na stałą wiązania (g_μ) procesu rozpadu mezonu μ wielkość tego samego rzędu co stała g rozpadu β . Zbieżność tych liczb wskazuje, że istotnie pomiędzy jądrowym rozpadem β a rozpadem mezonu μ istnieje ścisła współzależność, usprawiedliwiająca traktowanie rozpadu mezonu μ jako elementarnej postaci rozpadu β .

Szczupłość danych doświadczalnych nie pozwoliła autorom na wyciągnięcie definitywnych wniosków co do charakteru wiązania. Jeżeli jednak przyjąć, że stałe g i g_μ są identyczne, oraz że $\mu^0 = \nu$, to teoria przemawia za wektorowym ewentualnie tensorowym typem wiązania. Niezależnie jednak od tego jaki typ wiązanie się zaakceptuje, koncepcja rozpadu według schematu

$$\mu^\mp \rightarrow e^\mp + 2\nu \quad (\text{II-61})$$

została przez teorię w zupełności potwierdzona.

Poznań, listopad 1950 r.

*Zakład Fizyki Doświadczalnej
Uniwersytetu Poznańskiego*

Literatura

1. ADAMS R. V., ANDERSON C. D., LLOYD P. E., RAU R. R. and SAXENA R. C., *Rev. Mod. Phys.* **20**, 334 (1948).
2. ПЛИХАНЯН А., МОРОЗОВ В., ХАРИТОНОВ В., ДАЙОН М., Д. А. Н. С. С. С. Р. **60**, 1515 (1948).
3. ANDERSON C. D. and ADAMS R. V., LLOYD P. E. and RAU R. R., *Phys. Rev.*, **72**, 724 (1947).
4. ANDERSON C. D. and NEDDERMAYER S. H., *Phys. Rev.* **54**, 88 (1938).
5. AUGER P., EHRENFEST P., FREON A., FOURNIER A., *C. R. de l'Ac. d. Sc. Paris*, **204**, 257 (1937).
6. AUGER P., MAZE R. et CHAMINADE R., *C. R. de l'Ac. d. Sc. Paris*, **213**, 381 (1941).
7. BARKAS W. H., BISHOP A. S., BRADNER H. and SMITH F. M., *Phys. Rev.* **77**, 462 (1950).

8. БЕЛЕЬКИЙ Д. И., Мезон (1947).
9. БЕЛЕНЬКИЙ Д. И., НЕМИРОВСКИЙ Х., Мезон (1947).
10. BERNARDINI G., AGENS M., SACCIAPUOTI N. B., FERRATTI B., WICK G. C., *Phys. Rev.* **57**, 945 (1940).
11. ВНАВНА Н. J., HEITLER W., *Proc. Roy. Soc. A.* **159**, 432 (1937).
12. БИРГЕР Г., ЕЙДУС Л. Л., Д. А. Н. С. С. С. Р. **65**, 819 (1949).
13. BISHOP A. S., BRADNER H., SMITH F. M., *Phys. Rev.* **76**, 1073 (1949).
14. BRODE R. B. and RETTALLACK J. G., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 37 (1949).
15. BROWN W. W. and MCKAY A. S., *Phys. Rev.* **77**, 342 (1950).
16. BURFENING J., GARDNER E., LATTES C. M. G., *Phys. Rev.* **75**, 382 (1949).
17. CAMERINI U., COOR T., DAVIES J. H., FOWLER P. H., LOCK C. W., MUIRHEAD H. and TOBIN N., *Phil. Mag.* **40**, 1073 (1949).
18. CARLSON J. E., OPPENHEIMER J. F., *Phys. Rev.* **51**, 220 (1937).
19. CHANG W. Y., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 166 (1949).
20. CHRISTY R. F., KUSAKA S., *Phys. Rev.*, **59**, 404 (1941).
21. CLAY P. H., van GEMERT, CLAY J., *Physica* **6**, 184, 497, (1939).
22. COCCONI G., *Rev. Mod. Phys.* **26**, 26 (1949).
23. CONVERSI M., PANCINI E., PICCIONI O., *Phys. Rev.* **71**, 209 (1947).
24. CONVERSI M., PICCIONI O., *Phys. Rev.* **55**, 104 (1946).
25. CORBEN H. C., SHWINGER J., *Phys. Rev.* **58**, 953 (1940).
26. COSYNS M., DILWORTH C. C., OCCHIALINI G. P. S., SCHONBERG M., PAGE N., *Proc. Phys. Soc. A.* **62**, 801 (1949).
27. DAVIES J. H., LOCK W. O., and MUIRHEAD H., *Phil. Mag.* **40**, 1250 (1949).
28. DILWORTH C. C., PAGE N., *Nuov. Cim.* **VI**, IX, 3, 348, (1949).
29. FERMI E., TELLER E. and WEISSKOPF V., *Phys. Rev.* **71**, 314 (1947).
30. FLETCHER J. C., FORSTER H. K., *Phys. Rev.* **75**, 204 (1949).
31. FOLLET D. H., and CRAWSHAW J. D., *Proc. Roy. Soc. A.* **155**, 546 and (1936).
32. FOWLER P. H. *Phil. Mag.* **41**, 169 (1950).
33. FOWLER P. H., COOL R. L. and STREET J. C., *Phys. Rev.* **74**, 101 (1948).
34. FRANZINETTI C., *Cosm. Radiation*, London 1949; *Phil. Mag.* **41**, 86 (1950).
35. FRETTER W. B., *Phys. Rev.* **70**, 625 (1946).
36. FROST R. H. *Ph. D. Th. Un. of California* Berkeley (1947).
37. GARDNER E., IATTES C. M. G., *Science* **107**, 270 (1948).
38. GOLDSCHMIDT-CLERMONT J., KING D. T., MUIRHEAD H. and RITSON D. M., *Proc. Phys. Soc.* **61**, 138 (1948),
39. GROETZINGER G. and MCCLURE O. W., *Phys. Rev.* **74**, 341 (1948), **75**, 340 (1949).
40. HASEN W. E., *Phys. Rev.* **67**, 269 (1945).
41. HINCKS E. P. and PONTECORVO B., *Phys. Rev.* **73**, 1251 (1848); **75**, 698 (1949); **77**, 102 (1950).
42. HORWITZ J. J., KOFOED-HANSEN O., LINDHARD J., *Phys. Rev.* **74**, 713 (1948).

43. HUGHES D. *Phys. Rev.* **60**, 414 (1941).
44. JOHNSON T. H. and POMERANTZ D.M., *Phys. Rev.* **55**, 104 (19.9).
45. JOHNSON T. H. and SHUTT R. P., *Phys. Rev.* **61**, 380 (1942).
46. KLEIN O., *Nature* **161**, 897 (1948).
47. JANOSSY L., *Cosmic Rays*, Oxford 1947.
48. LATTES C. N. G., FOWLER P. F. and CUER P., *Proc. Phys. Soc.* **59**, 883 (1947).
49. LATTES C. N. G., OCCHIALINI G.P.S., POWELL C. F., *Nature* **160**, 453, 486 (1947).
50. ЛЕБЕДЕВ В. И., МАКАРОВ М., Ж. Э. Т. Ф. **19**, 212 (1949).
51. LEIGHTON R. B., ANDERSON C. D., SERIFF A. J., *Phys. Rev.* **75**, 1432 (1948).
52. LEPRINCE-RINGUET L. et GOROI ETZKY S., *C. R. de l'Ac. d. Sc. Paris* **213**, 618 (1944).
53. MARSHAK R. E. and BETHE H. A., *Phys. Rev.* **72**, 506 (1940).
54. МИГДАЛ А. В., ПОМЕРАНЧУК У. Й., Д.А.Н.С.С.С.Р **27**, 352 (1940).
55. NEHER H. V. and STEVER H. G., *Phys. Rev.* **58**, 766 (1940).
56. NERESON N. G., *Phys. Rev.* **74**, 509 (1948).
57. NIELSEN C. E. and POWELL W. M., *Phys. Rev.* **63**, 334 (1943).
58. NIELSEN W. M. N., REYERSON C. M., NORDHEIM L. W. and MORGAN K. Z., *Phys. Rev.* **57**, 158 (1940).
59. NISHINA Y., TAKEUCHI M., and ISHIMIYA I., *Phys. Rev.* **52**, 1198 (1937).
60. NORDHEIM L. W., *Phys. Rev.* **59**, 554 (1941).
61. ПОМЕРАНЧУК И. Й., МИГДАЛ А. В., Д.А.Н.С.С.С.Р. **27**, 652 (1940).
62. POMERANTZ D. M., *Phys. Rev.* **57**, 2 (1940).
63. PONTECORVO B., *Phys. Rev.* **72**, 246 (1947).
64. POWELL C. F., *Rep. on Progr. in Phys.* **13**, 350 (1950).
65. POWELL C. F. and ROSENBLUM S., *Nature* **161**, 475 (1948).
66. RASSETTI F., *Phys. Rev.* **59**, 613, 706 (1941); **60**, 198 (1941).
67. RETTALACK J. G. and БРОДЕ R. B. — porównaj (14).
68. ROCHESTER G. D. and BUTLER C. C., *Nature* **855**, 160 (1947).
69. ROSSI B., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 104 (1949).
70. ROSSI B. and HALL D. H., *Phys. Rev.* **59**, 233 (1941).
71. ROSSI B., HILBERRY N. and HOAG J. B., *Phys. Rev.* **57**, 461 (1940).
72. ROSSI B. and NERESON N. G., *Phys. Rev.* **62**, 417 (1942); **64**, 199 (1943).
73. ROSSI B., SANDS M. and SARD R. F., *Phys. Rev.* **72**, 120 (1947).
74. SARD R. D., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 35 (1949).
75. SARD R. D. and ALTHAUS E. J., *Phys. Rev.* **73**, 1251 (1948).
76. SARD R. D., ITTNER W. B., CONFORTO A. M. and CROUCH M. F., *Phys. Rev.* **74**, 97 (1948).
77. SCHEIN M. and GILL P., *Rev. Mod. Phys.* **11**, 267 (1939).
78. SERIFF A. J., LEIGHTON R. B., ANDERSON C. D., *Phys. Rev.* **75**, 1432 (1949).
79. SHAMOS M., RUSSEK H., *Phys. Rev.* **74**, 1545 (1948).
80. SHUTT R. P., De BENEDETTI S., JOHNSON T. H., *Phys. Rev.* **62**, 552 (1942).

81. SIGURGEIRSSON T., YAMAKAWA A., *Phys. Rev.* **71**, 319 (1947).
82. SIGURGEIRSSON T., YAMAKAWA V., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 124 (1949).
83. SNELL A., *Science* **108**, 167 (1948).
84. STEINBERGER J., *Phys. Rev.* **74**, 500 (1948), **75**, 1136 (1949).
85. TAMM И., Е. БЕЛЕНЬКИЙ Д., *J. Phys. U. S. S. R.* **1**, 177 (1939).
86. THOMSON R. W., *Phys. Rev.* **74**, 490 (1945).
87. TICHO H. R. and SCHEIN M., *Phys. Rev.* **72**, 248 (1947); **73**, 81 (1948); **74**, 1337 (1948).
88. TOMONAGA S. and ARAKI G., *Phys. Rev.* **51**, 90 (1940).
89. VALLEY, G. E. (1945); por. POWELL C. F., *Rep. on Progr. in Phys.* **13**, 350 (1950).
90. VALLEY G. E., *Phys. Rev.* **72**, 772 (1947).
91. VALLEY G. E. and ROSSI B., *Phys. Rev.* **73**, 177 (1948).
92. VOORHIES H. G., STREET J. C., *Phys. Rev.* **76**, 1100 (1949).
93. ВАЙСЕНБЕРГ А. А., *Ж.Э.Т.Ф.* **19**, 727 (1949).
94. WEISCHEDEL F. ZS, *f. Phys.* **101**, 732 (1935).
95. WEISSKOPFF V. F., *Phys. Rev.* **72**, 155 (1947).
96. WEISSKOPFF V. F. *Phys. Rev.* **72**, 510 (1947).
97. WHEELER J. A., *Phys. Rev.* **71**, 320, 462 (1947).
98. WHEELER J. A., TIOMNO J., *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 144 (1949).
99. WHEELER J. A., TIOMNO J., *Rev. Mod. Phys.* **21**, 153 (1949).
100. WILLIAMS E. J., *Proc. Roy. Soc. A.* **169**, 531 (1936).
101. WILLIAMS E. J. and PICKUP E., *Nature* **141**, 684 (1938).
102. WILLIAMS E. J. and ROBERTS G. E., *Nature* **145**, 102 (1940).
103. WILSON J. G., *Proc. Roy. Soc. A.* **172**, 517 (1939).
104. ZAR J. Z., HERSHKOWITZ J., BEREZIN E., *Phys. Rev.* **74**, 111 (1948).
105. ЖДАНОВ Г. Б., ХАЙДАРОВ А. А., *Д.А.Н.С.С.С.Р.* **27**, 652 (1949); **65**, 287 (1949).
106. ЖДАНОВ Г. Б., НАУМОВ А. А., *Ж.Э.Т.Ф.* **19** 273 (1949).

M. KWIEK

WSPÓŁCZESNE POGLĄDY NA DYNAMIKĘ OBIEGU KRWI (HEMODYNAMIKA)

1. Przegląd prac dawniejszych

Główne i aktualne do dzisiaj idee hemodynamiki dał Euler w r. 1775 [6]. Teoria jego ma charakter teorii falowej i opiera się na bystrej obserwacji zjawisk i śmiałych rachunkach. Podbudowa doświadczalna tej teorii jest raczej nie wielka, stąd, mimo że dzisiaj do poglądów Eulera powracamy, powstała potrzeba przeprowadzenia badań doświadczalnych, które przez swą prymitywność i niedokładność doprowadziły do błędnych wniosków oraz innych teorii, znacznie mniej wartościowych.

Wynalazcą urządzenia do rejestrowania przebiegu ciśnienia krwi w tętnicy jest Marey [13], którego trzeba uważać za autora klasycznego opisu zjawiska tętna (pulsu). „Sfigmomanometr” Mareya, jako poręczne narzędzie pracy, dał asumpt wielu badaczom do rejestrowania krzywych tętna w różnych okolicznościach i warunkach i do licznych prac opisowych na ten temat. Niewielu spośród nich przystąpiło do fizycznego badania tych krzywych, traktując je jako drgania periodyczne i stosując do nich analizę fourierowską. I tak np. Broemser w swojej rozprawie habilitacyjnej (1918 r.) badając puls tętnicy głównej w pobliżu serca stwierdza istnienie 40 alikwotów fourierowskich, tzn. przyjmując częstość tętna $72 \text{ min}^{-1} = 0,83 \text{ Hz}$, stwierdza, że jeszcze częstość ok. 33 Hz ma istotne znaczenie; natomiast w naczyniach obwodowych znajduje 6 do 8 alikwotów, wystarczających do dokładnego opisu drgania. W roku 1933 Matoba i Kajiura [14] badają tętno w naczyniach obwodowych u 10 zdrowych i 10 chorych na miażdżycę tętnic (arteriosclerosis). Przeprowadzili oni przybliżoną fourierowską analizę, dzieląc okres drgań na 24 części i całkując numerycznie; godnym zanotowania wynikiem jest to, iż pacjenci sklerotyczni ujawniają w pulsie obwodowym większe amplitudy wyso-

kich alikwotów niż zdrowi. W połączeniu z poprzednimi wynikami Broemsera można by domniemywać, że u zdrowego i chorego może być podobne widmo pulsu w okolicy serca, natomiast u zdrowego wysokie alikwoty ulegają silniejszemu tłumieniu wzdłuż naczyń krwionośnych. W r. 1940 Broemser powrócił do tego zagadnienia [4] usiłując rozwiązać inny problem: drgań własnych oraz tłumienia aorty, rozumianej jako sprężysty zbiornik krwi. Autor ustawił tutaj równania, wychodzące z analizy widmowej pulsu aorty oraz naczyń obwodowych, tę analizę przeprowadził. Wreszcie I. G. Porjé, również dla rozwiązania innego zagadnienia, przeprowadził większą liczbę analiz fournierowskich drgań pulsu [19] ograniczając ją do trzeciego alikwotu. Ostatecznie więc dla naszych wiadomości o widmie drgań tętna najważniejsze są pierwsze prace Broemsera oraz prace Matoby i Kajury.

Istotnie interesujące są, prócz przebiegów drgania pulsu w określonym punkcie, prawa rozchodzenia się fali pulsu w układzie krwionośnym. Do nauki o tych właśnie zjawiskach stosuje się naogół nazwę „hemodynamika“. Obserwować tu możemy, że silnie rozbudowana, ale wychodząca z wątpliwych danych doświadczalnych teoria nie tylko wyprzedziła badania eksperymentalne, ale na długi okres czasu zwichnęła ich kierunek.

E. H. Weber badał prędkość rozchodzenia się fali pulsu w ludzkim układzie krwionośnym w latach 1850-tych [21]. W tym celu mierzył odstęp czasu między pojawieniem się uderzenia fali pulsu w dwóch punktach, łatwo dostępnych na tętnicy; otrzymana wartość wynosiła ok. 10 m/sek i odnosiła się — według naszych dzisiejszych pojęć — do prędkości grupowej. W. Weber zapoczątkował badania rachunkowe nad prędkością rozchodzenia się fali pulsu. Przyjął on [22], że krew jest cieczą nieściśliwą o gęstości ρ , a ściany, naczyń krwionośnych są sprężyste, lecz pozbawione jakiegokolwiek bezwładności. Jeżeli ciśnienie w naczyniu wynosi p , zaś promień naczynia r , to prędkość rozchodzenia się fali pulsu jest:

$$v^2 = -\frac{r}{2} \frac{dv_0}{dp} \quad (1.1)$$

Wzór ten jest o tyle prymitywny, że nie uwzględnia sprężystości objętościowej naczynia. Pierwszym który wyszedł od sprężystości objętościowej był v. Kries, którego wzór jest

$$v^2 = \frac{Q}{\rho} \cdot \frac{dp}{dQ}, \quad (1,2)$$

gdzie Q oznacza powierzchnię przekroju naczynia [12]. Naczynie krwionośne Kriesa pod działaniem ciśnienia zwiększa przekrój, ale nie wydłuża się. Równoczesne uwzględnienie zwiększenia przekroju i wydłużenia naczynia przeprowadził O. Frank [7].

Wzór Franka brzmi

$$v^2 = \frac{\kappa}{\rho}, \quad \kappa = \frac{dp}{dV}; \quad (1,3)$$

κ = moduł sprężystości objętościowej; V jest rozumiane jako całkowita objętość naczynia krwionośnego, a dV przyrost tej objętości pod przyrostem ciśnienia dp . Przeliczając wzór (1.3) na promień r naczynia, grubość b jego ścianki oraz moduły sprężystości E_1 — obwodowy i E_2 — długościowy otrzymuje się (dla naczynia zamkniętego z obu stron)

$$\frac{dp}{dV} = \frac{b}{rV} \cdot \frac{1}{2 + \frac{1}{E_1} + \frac{1}{2E_2}}. \quad (1,4)$$

Wzory te podsuwają wprowadzenie pojęcia zastępczej objętości V , która by była tak dobrana, by reprezentować całość układu krwionośnego. Taka pojemność zastępcza (po niem. Windkessel, ang. air chamber), nazwana po polsku przez prof. M. Semerau-Siemianowskiego „powietrzną“, stanowi pewną fikcję rachunkową. Ma ona mieć średnicę aorty, a długość konieczną dla uzyskania takiej prędkości rozchodzenia się, jaka występuje naprawdę w organiźmie.

Nazwa powietrzna, już utarta, nie oddaje dokładnie znaczenia nazwy niemieckiej, stworzonej przez E. H. Webera oraz Franka, u których serce porównywane jest do silnika wybuchowego, wyrzucającego krew nagłymi rzutami. Wtedy elastyczne ściany wielkich naczyń rozciągają się, a energia kinetyczna krwi wyrzucanej zmienia się w potencjalną energię sprężystą. W okresach, których serce nie pompuje, powolny skurcz wielkich naczyń daje równomierny odpływ krwi przez drobne naczynia obwodowe. Sprężystość wielkich naczyń daje więc ten sam efekt, co sprężystość powietrza, ściskanego przez wodę w zbiornikach wysokoprężnych instalacji wodociągowych.

Badania D. Aleksandrowa [1] wykazały, że nie ma związku między wyliczonymi dla różnego rodzaju pacjentów wymiarami (raczej długością) powietrzni, a ich stanem chorobowym. Nadzwyczaj sumienne i dokładne pomiary tego autora wykazują, że pojęcie długości powietrzni, łatwe do wprowadzenia teoretycznego, nie jest celowe w opisie stanu układu krążenia. W związku z tym prace Franka [8], Broemsera i Rankego [5] oraz Wezlera i Bögera [23], które miały w oparciu o teorię powietrzni wprowadzić prawidłową definicję prędkości rozchodzenia się, oraz opanać zagadnienie tworzących się odbić i fal stojących, nie mogły doprowadzić do rozjaśnienia sytuacji. Rozjaśnienie to zawdzięczamy A. Apériemu, Karolowi Mayerowi (pracującemu niezależnie od niego) oraz G. Porjému, który kontynuuje prace Apérii.

Zdefiniowane pojęcia prędkości posuwania się fali postępującej nie przedstawia trudności. W prostym przypadku „profil“ fali, tzn. zależność wychylenia ξ od czasu t , pojawia się bez zmian w każdym punkcie tętnicy, tylko z opóźnieniem proporcjonalnym do odległości punktu obserwacji od obranego punktu początkowego. Wyraża się to wzorem:

$$\xi = f\left(t - \frac{l}{c}\right). \quad (1.5)$$

W przypadku nieco bardziej skomplikowanym profil, dany przez funkcję f zmienia swą wielkość w miarę oddalania się od punktu początkowego. Współczynnik proporcjonalności $\varphi(l)$ zależy tylko od odległości l :

$$\xi = \varphi(l) \cdot f\left(t - \frac{l}{c}\right) \quad (1.6)$$

W obu tych przypadkach łatwo znaleźć na profilach fal, obserwowanych w dwóch miejscach tętnicy, punkty które sobie odpowiadają: będą to punkty, w których funkcja f ma tę samą wartość. Definicją prędkości fazowej takiej fali będzie stosunek odległości miejsc obserwacji do czasu, jaki upływa między pojawieniem się odpowiadających sobie punktów profilu w obu miejscach.

Jeżeli jednak profil fali zmienia nie tylko swoją wielkość, lecz również i swój kształt w zależności położenia od punktu pomiaru, to zdefiniowanie prędkości rozchodzenia się fali nie jest takie łatwe. Mogą tutaj być różne przypadki, np.

$$\xi = \varphi(l) f\left(t - \frac{l}{c}\right) + \Psi(l) f'\left(t - \frac{l}{c}\right), \quad (1.7)$$

który spotykamy np. przy promieniowaniu dipolowym, i wtedy:

$$\varphi(l) = \frac{1}{l}, \quad \Psi(l) = \frac{1}{l^2}; \text{ albo}$$

$$\xi = f\left(t - \frac{l}{c}\right) + g\left(t + \frac{l}{c}\right), \quad (1.8)$$

spotykany w falach płaskich z odbiciami.

Jeszcze ciekawszy przypadek mamy dla fali rozchodzącej się z jednego punktu. Szczególnie interesujące jest wtedy rozchodzenie się profilu fali sinusowej, określonego nie przez wychylenie ξ lecz przez prędkość cząstki $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ która jest równa [9]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\omega A}{cl} \sin \omega\left(t - \frac{l}{c}\right) + \frac{A}{l} \cos \omega\left(t - \frac{l}{c}\right), \quad (1.9a)$$

Te dwa składniki można zebrać w jeden, według zwykłych zasad dla przekształcenia funkcji trygonometrycznych, pisząc

$$\frac{1}{l} = a \cos \alpha, \quad \frac{c}{\omega l^2} = a \sin \alpha, \quad \text{skąd} \quad \alpha = \arctan \frac{c}{\omega l},$$

co daje

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\frac{\omega A}{cl \cos \alpha} \sin \omega\left(t - \frac{l}{c} - \frac{\alpha}{\omega}\right). \quad (1.9b)$$

Widać stąd, że profil fali jest sinusowy; znajdziemy prędkość fazową tego profilu. Będzie to prędkość obserwatora, który porusza się z falą, trzymając się określonego punktu profilu.

W czasie Δt obserwator ten przebiega drogę Δl ; aby związać go z określonym punktem profilu starczy napisać, że wartość argumentu funkcji sinus nie ulega zmianie przez dodanie tych przyrostów czasu oraz drogi, czyli

$$\omega \Delta t - \frac{\omega \Delta l}{c} - \left(\arctan \frac{c}{\omega(l + \Delta l)} - \arctan \frac{c}{\omega l} \right) = 0, \quad (1.10)$$

Wyraz w nawiasie w przybliżeniu można napisać w postaci:

$$\frac{d}{dl} \left(\arctan \frac{c}{\omega l} \right) \Delta l = - \frac{\omega c \Delta l}{\omega^2 l^2 + c^2},$$

co daje dla warunku (1.10) relacje

$$\Delta t - \frac{\Delta l}{c} + \frac{c \Delta l}{\omega^2 l^2 + c^2} = 0,$$

z której bezpośrednio wynika szukana prędkość fazowa $\frac{\Delta l}{\Delta t}$:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = c \left(1 + \frac{c^2}{\omega^2 l^2} \right); \quad (1.11)$$

jest ona zatem zmienna w zależności od odległości l od źródła. W przypadku (1.8) prędkość rozchodzenia się jest stała i równa $\pm c$, ale nie może być definiowana dla profilu $f+g$, tylko wynosi $+c$ dla profilu f oraz $-c$ dla profilu g . Nie możemy wtedy stosować podanego wyżej rozumowania o „odpowiadających sobie punktach profilu“ dla mierzenia prędkości rozchodzenia się fali.

Przypadek (1.8) można — jak to zrobił A. A p é r i a [2] — nagiąć do celów hemodynamiki, kładąc

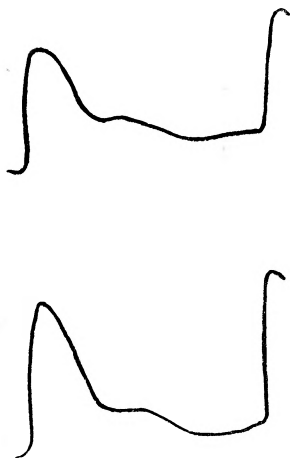
$$f = A \cos \omega \left(t - \frac{l}{c} \right), \quad g = B \cos \omega \left(t + \frac{l}{c} \right).$$

Będzie wtedy — zgodnie ze znanym ogólnie rozumowaniem o falach stojących

$$\begin{aligned} p &= A \cos \omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + B \cos \omega \left(t + \frac{l}{c} \right) = \\ &= (A-B) \cos \omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + B \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + \cos \omega \left(t + \frac{l}{c} \right) \right\} = \\ &= (A-B) \cos \omega \left(t - \frac{l}{c} \right) + B \cos \omega t \cos \frac{\omega l}{c} = p_1 + p_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Składnik $p_1 = (A-B) \cos \omega (t-l/c)$ jest nazywany falą postępującą, natomiast składnik $p_2 = B \cos \omega t \cos \omega l$ nazywamy falą stojącą; p_2 osiąga swoje wartości równocześnie wzdłuż całej tętnicy; wartości te rządzone są przez czynnik $B \cos \frac{\omega l}{c}$, zależny od punktu pomiaru l .

Zwolennicy teorii powietrzni musieli przyjąć fakt doświadczalny, że fala pulsu nie jest falą czysto postępującą, lecz że zawiera trudny do oddzielenia składnik, będący falą stojącą, pochodzący od odbić — oraz nałożony nań składnik postępujący. Frank podkreśla znaczenie odbić, ale nie czyni z tego użytku w rozbudo-



Rys. 1

wie teorii powietrzni. Woli on raczej przyjąć jako wysoce prawdopodobne, że odpowiadają sobie punkty, położone na krzywych pulsu w wysokości $1/5$ nad dolnym minimum na gałęzi wzrastającej. Stanowisko takie można uważać za zdrowe: jest to umowa, obarczona w takim samym stopniu dowolnością, jak umowa o długości powietrzni. Broemser i Ranke wprowadzają inną, równie dowolną umowę: za punkty odpowiadające sobie uważają pierwsze punkty zwrotne gałęzi wznoszących się (rys. 1).

Natomiast Wezler i Böger chcą powiązać w konsekwentny sposób długość powietrzni z falą stojącą, istniejącą w aorcie. W tym celu uważają oni powietrznię za odpowiednik piszczalki krytej o długości równej $1/4$ długości fali. Uzgodnienie tego założenia z danymi doświadczalnymi o przebiegu krzywych pulsu w różnych punktach układu prowadzi do okresu drgań własnych powietrzni, wynoszącego od $1/4$ do $1/2$ sek, zatem zgodnego z okresem drugiego lub trzeciego alikwotu fali pulsu. Rachunki tych autorów są jednak tak dalece uproszczone, że obracają się na pograniczu z dowolnymi oszacowaniami.

Bezpośrednie pomiary przebiegu ciśnienia fali pulsu przeprowadzali Hamilton i Dow [10]. Zwierzęciem doświadczalnym był

pies; przy pomocy specjalnego manometru badano przebieg ciśnienia wzdłuż aorty aż do tętnicy udowej. Okazało się, że chociaż średnie ciśnienie pozostaje stałe, poszczególne krzywe ciśnienia są różne i ciśnienie maksymalne wzrasta w miarę zbliżania się do tętnicy udowej. Jeżeli w drodze umowy przyporządkować sobie jako odpowiednie pewne punkty wykresu ciśnienia, to otrzymuje się prędkość fali wzrastającą wraz ze zbliżeniem do tętnicy udowej. Taką samą dowolnością jest podporządkowanie sobie pewnych punktów na wykresach ciśnienia, jak tłumaczenie otrzymanych różnic prędkości przez hipotezę o lokalnych różnicach sprężystości aorty. Wyczuwa się tu wyraźny brak ścisłego podkładu fizycznego.

2 Prace Mayera, Apérii oraz Porjégo

Prace zreferowane powyżej nie wyświetliły, a częściowo nie zauważyły nawet istotnych problemów hemodynamiki. Trzeba bardzo wielkiego krytycyzmu, aby uwolnić się od sugestii dobrze rozbudowanych, ale nieugruntowanych doświadczalnie teoryj i rozpocząć badania zjawisk od początku, odrzucając cały balast prac poprzedników.

Karol Mayer [15] i [16] rozpoczął wnikliwą obserwację zjawisk przepływu krwi, przyjmując stanowisko, że dawne opisy nie są dokładne i że nie można na nich budować żadnej teorii ścisłej. Obserwacje Karola Mayera są następujące:

I. Fala pulsu składa się ze składników alikwotów fourierowskich, rozchodzących się w naczyniach krwionośnych z różnymi prędkościami. Najszybciej rozchodzi się — z prędkością ok. 1 500 m/sek — pierwsze uderzenie ciśnienia, które ze względu na swą nagłość zawierać musi częstości do 500 hz conajmniej. Najwolniej porusza się — z prędkością grupową ok. 10 m/sek — fala przepływu krwi. W pierwszym uderzeniu ciśnienia nie ma jeszcze wyraźnego prądu krwi, jest ono jednak zdolne rozszerzyć dobrze naczynia, zmniejszyć ich opór hydrodynamiczny i utorować drogę przyszłemu prądowi.

II. W wytworzeniu zjawiska falowego biorą udział naczynia krwionośne i tkanka otaczająca nie tylko jako masa sprężysta (jak to chciały widzieć dawniejsze teorie), ale również jako masa bezwładna.

Doświadczenia opisane w tych pracach wykonane są co prawda metodami prymitywnymi, bez stosowania urządzeń elektroakustycznych, są jednak przekonujące. Prędkość rozchodzenia się jest definiowana nie przez porównanie dwóch odpowiednich punk-

tów na wykresie sfigmomanometrycznym, ale przez pomiar czasu pomiędzy skurczem lewej komory a dojściem pierwszego uderzenia ciśnienia do naczyń obwodowych, oraz między skurczem lewej komory a dojściem fali przepływu krwi do naczyń obwodowych.

M a y e r w swych dostępnych dla nas pracach nie przeprowadza rachunków dotyczących prędkości poszczególnych fal, interesuje się tylko oszacowaniem pracy wykonywanej przez serce. Łatwo jest zrekonstruować rozważania teoretyczne, dotyczące dyspersji prędkości i prędkości grupowej w naczyniu krwionośnym, o ile zaniedbamy istnienie odbić. Zaniedbanie to jest dopuszczalne, jeżeli definiować prędkości tak, jak to definiuje M a y e r: nie jako prędkość fazy całkowitego profilu, mierzoną pomiędzy dwoma dowolnie wybranymi punktami obserwacji na tętnicy, ale jako prędkość rozchodzenia się czoła zaburzenia, mierzoną między źródłem zaburzenia a punktem, w którym powstaje ewentualne odbicie. Przytym pogłębiona obserwacja M a y e r a dostrzega — zgodnie zresztą z przewidywaniami pogłębionej teorii — dwa zaburzenia: zaburzenie ciśnienia, oraz zaburzenie prądu, do czego powrócimy, omawiając krytycznie metody doświadczalne.

Dla znalezienia wyrazu matematycznego dla oporu, jaki stawia ścianka tętnicy przeciwko sile ciśnienia, możemy w pierwszym przybliżeniu rozumować następująco. Niech przez tętnicę przechodzi sinusoidalna fala ciśnienia, dana przez

$$\bar{p} = p \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (2.1)$$

W pewnym punkcie weźmy pod uwagę równowagę ciśnień działających na element powierzchni ściany. Przeciwko ciśnieniu krwi pojawiają się następujące ciśnienia wywołane przez wpływ ścianek.

I. Siła sprężystości, której ciśnienie na element powierzchni będzie

$$\bar{p}_1 = k \Delta \bar{r},$$

gdzie k jest odpowiednim współczynnikiem sprężystości, a $\Delta \bar{r}$ przyrostem promienia r_0 tętnicy pod działaniem ciśnienia \bar{p} .

II. Siła tarcia wewnętrzznego w ściankach tętnicy i rozpychanych tkankach otaczających, proporcjonalna do prędkości $d\Delta \bar{r}/dt$ ruchu ścianek naczynia; ciśnienie wywołane przez wpływ tej siły będzie

$$\bar{p}_2 = R \frac{d\Delta \bar{r}}{dt},$$

gdzie R jest odpowiednim współczynnikiem tarcia wewnętrznego, odniesionym do jednostki powierzchni wewnętrznej naczynia.

III. Siła bezwładności \bar{p}_3 masy M_n ściany naczynia wraz z masą M_t poruszonych tkanek (łączna masa $M = M_n + M_t$), proporcjonalna do przyspieszenia $a = d^2\Delta r/dt^2$ udzielonego ścianie naczynia:

$$\bar{p}_3 = m \frac{d^2 \Delta r}{dt^2},$$

gdzie m jest gęstością powierzchniową masy M , odniesioną do jednostki powierzchni naczynia.

Równość ciśnienia krwi oraz ciśnień reakcji daje równanie

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 + \bar{p}_3 = \bar{p},$$

czyli

$$k \Delta \bar{r} + R \frac{d \Delta \bar{r}}{dt} + m \frac{d^2 \Delta \bar{r}}{dt^2} = p \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (2.2)$$

Równanie to łatwo scałkować kładąc $\Delta \bar{r} = \Delta r \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} + \psi \right)$ i wyliczając algebraicznie niewiadome Δr oraz ψ . Otrzymuje się

$$\Delta r = \frac{p}{\sqrt{\left(m \omega - \frac{k}{\omega} \right)^2 + R^2}}; \quad \tan \psi = \frac{-R}{m \omega - \frac{k}{\omega}}. \quad (2.4)$$

Z wzorów tych można wnioskować o współczynniku sprężystości objętościowej naczynia, jeżeli założyć że naczynie nie doznaje wydłużenia sprężystego, co jest w przybliżeniu słuszne, a tylko powiększenia promienia. Jeżeli ciśnienie doznaje przyrostu dp , to promień doznaje przyrostu $dr = d\Delta r$. Powierzchnia przekroju zwiększa się o powierzchnię pierścienia $2\pi r \cdot dr$, a objętość naczynia o długości L zwiększa się o $2\pi r \cdot dr \cdot L$. Względny przyrost objętości jest

$$\frac{dV}{V} = \frac{2\pi r L \cdot dr}{\pi r^2 L} = \frac{2 dr}{r}. \quad (2.5)$$

Współczynnik sprężystości objętościowej $\kappa = dp/dV$ można wyliczyć znajdując związek między dr a dp z wzorów (2.4) oraz (2.1).

Dla wartości bezwzględnych znajdziemy związek

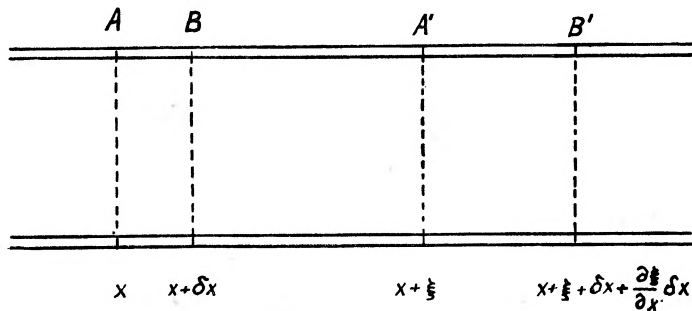
$$dr = \frac{dp}{\sqrt{\omega^2 R^2 + (m\omega^2 - k)^2}} \quad (2.6)$$

skąd, ponieważ według (2.5) $dV = \frac{2Vdr}{r}$, otrzymuje się

$$\alpha = \frac{r\sqrt{\omega^2 R^2 + (m\omega^2 - k)^2}}{2V}$$

Współczynnik ten należy odnieść do jednostki objętości, co daje wprost

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} r \sqrt{\omega^2 R^2 + (m\omega^2 - k)^2} \quad (2.7)$$



Rys. 2

Prędkość rozchodzenia się fali możemy wyliczyć wyprowadzając równanie falowe dla omawianego przebiegu, przy założeniu, że zmiany ciśnienia są bardzo małe. Jest to dozwolone dla każdego alikwotu sinusowego z osobna, gdyż nawet całkowite ciśnienie można uważać za małe w porównaniu z ciśnieniem średnim, a to całkowite ciśnienie składa się z ciśnień kilkudziesięciu alikwotów sinusowych. Pomyślmy w naczyniu dwie geometryczne płaszczyzny A oraz B, prostopadłe do osi naczynia (rys. 2). Pewna warstewka krwi, ograniczona tymi płaszczyznami, zajmuje położenie dane współrzędnymi x oraz $x + dx$. Po upływie krótkiego czasu dt , pod wpływem działającego ciśnienia, warstewka ta przemieszcza się w nowe położenie A'B'; warstewka A przechodzi w położenie A' o współrzędnej $x + \xi$ (gdzie ξ jest wielkością zwaną przesunięciem cząstkowym krwi

w punkcie x), a warstewka B przechodzi w położenie B' dane przez $x + \xi + \delta x + \frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x$. Wyraz $\frac{\partial \xi}{\partial x} \delta x$ jest dodatkowym przesunięciem ograniczeń warstewki względem siebie, pochodzącym od zmian ciśnienia; możemy napisać

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

gdzie σ będzie deformacją warstewki w zależności od współrzędnej x . Deformacja warstewki musi być równa ilorazowi zmiany ciśnienia przez współczynnik sprężystości objętościowej

$$\sigma = \frac{\delta p}{\kappa_1} = \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \cdot \delta p. \quad (2.8)$$

Oznaczmy teraz przez δp zmianę ciśnienia w punkcie A'. W punkcie B' wyniesie ona

$$\delta p + \frac{\partial(\delta p)}{\partial x} \delta x = \kappa_1 \sigma + \kappa_1 \frac{\partial \sigma}{\partial x} \delta x = \kappa_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \kappa_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x.$$

Różnica ciśnień na obu stronach warstewki musi być — o ile zanedbamy lepkość krwi — równa ciśnieniu sił bezwładności krwi, zatem

$$\kappa_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \delta x = \rho \delta x \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

gdzie ρ oznacza gęstość krwi, a prawa strona ma znaczenie iloczynu masy przez przyspieszenie, odniesionego do jednostki powierzchni. Równanie to jest równaniem falowym

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad \text{gdzie prędkość fali } c = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\rho}}. \quad (2.10)$$

Rozwiązaniem tego równania może być dowolna funkcja o postaci

$$\xi = f_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{x}{c}\right);$$

jeżeli przyjąć że nie ma odbić, to wystąpi tylko pierwsza z tych

funkcji. Można ją przyjąć, zgodnie z doświadczalnie stwierdzoną periodycznością ruchu, jako $\xi = -A \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$, wtedy będzie

$$\xi p = \kappa \sigma = \kappa_1 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{A}{x} \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

zgodnie z przyjętym za punkt wyjścia wzorem (2. 1).

Otrzymana wartość dla c okazuje się zależna od częstości. Jeżeli weźmiemy κ_1 z wzoru (2. 7), o otrzymamy

$$c^2 = \frac{r}{2 \varrho} \sqrt{\omega^2 R^2 + (m \omega^2 - k)^2}, \quad (2. 11)$$

Dla częstości granicznie małych mamy

$$c^2 = \frac{r k}{2 \varrho}. \quad (2. 11a)$$

$$(2. 11)$$

Jeżeli można zaniedbać tarcie R , to dla wielkich częstości wzór (2. 11) przybiera postać

$$c^2 = \frac{r m \omega^2}{2 \varrho}, \quad (2. 11b)$$

jeżeli natomiast R , tarcie w tkankach otaczających jest duże, to mamy

$$c^2 = \frac{r \omega}{2 \varrho} \sqrt{R^2 + m^2 \omega^2}. \quad (2. 11c)$$

Dla granicznie wysokich częstości prędkość c jest proporcjonalna do częstości ω , istnieje więc zjawisko zwane dyspersją prędkości. Musi więc też istnieć osobna prędkość grupowa, z którą będzie rozchodzić się całkowita fala tętna, i prędkość ta będzie różna od fazowych prędkości fal ciśnienia alikwotów. Widzimy więc, że przeprowadzone przez nas rozważania ujawniają istnienie dyspersji prędkości w naczyniach krwionośnych.

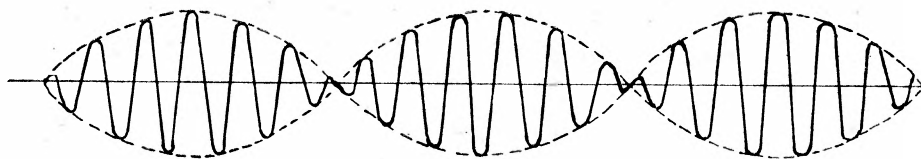
Należy jednak podkreślić, że w wyprowadzaniu powyższych wzorów poczyniliśmy pewne uproszczenia, z których najważniejszym jest założenie, że zmiany promienia naczynia można uważać za małe w porównaniu z samym promieniem. Przypuszczalnie założenie to nie prowadzi do dużych błędów, jeżeli chodzi o duże tętnice. Natomiast zastosowanie go do drobnych naczyń obwodowych byłoby nie-

usprawiedliwione, tym bardziej, że w naczyniach tych gęstość masy m , poruszanej wraz ze ścianką naczynia, będzie zależna nie tylko od częstości drgań, ale od konfiguracji całej siatki naczyń kapilarnych danego narządu. Z powodu bowiem małych odległości między naczyniami kapilarnymi trzeba przypuszczać, że ta sama masa tkanki będzie poruszana przez różne naczynia.

Zagadnienie prędkości przenoszenia się fali ciśnienia w naczyniach kapilarnych wydaje się niedostępne dla rachunków i raczej powinno być tematem badań doświadczalnych.

Zanim podejmiemy referowanie prac A p é r i i, wyjaśnimy bliżej pojęcie prędkości grupowej. Ciśnienie tętna jako periodyczna funkcja czasu daje się przedstawić w postaci sumy funkcji sinusowych postaci:

$$\bar{p} = p \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$



Rys. 3

Prędkość c jest zależna od częstości drgań ω . Jeżeli rozpatrzmy posuwanie się wzdłuż naczynia jakiejś „grupy“ fal, złożonej z fal sinusowych o różnych prędkościach rozchodzenia się, to prędkość rozchodzenia się całej grupy, zależy od prędkości składników. Najprostszą grupą może być suma dwóch fal o prawie równych częstościach $\omega_1 \cong \omega_2$ i prędkościach $c_1 \cong c_2$

$$\bar{p} = \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + \cos \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_2} \right) \quad (2.12)$$

ma ona postać podaną na rysunku 3. Kształt grupy obwiedziony jest linią kreskowaną; prędkość posuwania się tego kształtu jako całości nazywać się będzie prędkością grupową. Dla wyliczenia tej prędkości starczy przekształcić wzór (2.12) z sumy na iloczyn, kładąc $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega$, $\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega$ oraz $c_1 + c_2 = 2c$, $c_1 - c_2 = \Delta c$:

$$\begin{aligned}
 p &= \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_1} \right) + \cos \omega_2 \left(t - \frac{x}{c_2} \right) = \\
 &= 2 \cos \frac{1}{2} \left\{ (\omega_1 + \omega_2) t - \left(\frac{\omega_1}{c_1} + \frac{\omega_2}{c_2} \right) x \right\} \cos \frac{1}{2} \left\{ (\omega_1 - \omega_2) t - \left(\frac{\omega_1}{c_1} - \frac{\omega_2}{c_2} \right) x \right\},
 \end{aligned}$$

przekształcając dalej z zaniedbaniem iloczynów wielkości $\Delta \omega$ i Δc jako wielkości małych otrzymuje się

$$p = 2 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \cos \frac{\Delta \omega}{2} \left(t - \frac{x}{c \left(1 - \frac{\omega \Delta c}{c \Delta \omega} \right)} \right) \quad (2.13)$$

W tym wzorze widzimy dwa czynniki. Pierwszy oznacza falę o średniej częstotliwości $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ i o średniej prędkości rozchodzenia się $c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$. Drugi oznacza amplitudę, a więc maximum ciśnienia pierwszej fali. Maximum to nie ma stałego położenia, jak to było w falach stojących, ale przemieszcza się wzdłuż naczynia z prędkością:

$$g = c \left(1 - \frac{\omega \Delta c}{c \Delta \omega} \right) \quad (2.14)$$

a wartości jego dla pewnej chwili tworzą również falę — oznaczoną na rysunku jako kreskowana obwiednia — o częstotliwości drgań $\frac{1}{2} \Delta \omega$. Obwiednia ta wyznacza grupę fal o długości:

$$\lambda_g = \frac{2 \pi g}{\frac{1}{2} \Delta \omega} = \frac{4 \pi c}{\Delta \omega} \frac{\omega \Delta c}{\Delta \omega}$$

W prawdziwym przebiegu ciśnienia krwi w naczyniach mamy do czynienia nie z dwoma nakładającymi się na siebie drganiami sinusowymi o różnych prędkościach rozchodzenia się, ale z wielu drganiami, dlatego „grupa“ wytworzona nie ma takiej postaci jak na rysunku; „grupa“ jest właśnie zwykła fala tętna. Rozchodzi się ona z prędkością grupową, którą mierzy się w doświadczeniach wyżej opisanych i którą można odróżnić od prędkości fazowej fal składowych. Wyliczenie prędkości grupowej dla wielu składników nie prowadzi do tak prostego wzoru, jak (2.13).

W świetle tego wyjaśnienia jest zrozumiałe, że mogą współistnieć w tętnie fale ciśnienia, rozchodzące się z wielką dla wysokich alikwotów prędkością fazową, które obserwował Mayer, oraz fale „tętna“, rozchodzące się z niewielką prędkością grupową, znane i obserwowane powszechnie.

Wielką zasługą Apérii jest wciągnięcie do rozważań teoretycznych zagadnień odbić fali tętna [2, 3]. Według tego badacza, fala tętna, pierwotnie postępująca, ulega w rozgałęzieniach tętnic odbiciom, które posuwają się w przeciwnym kierunku; powróciwszy do serca, odbijają się te fale ponownie itd. Jednak przy tych odbiciach nie mamy wiernego zachowania profilu fali; odbicie jest częściowe, przez co profil fali odbitej ulega znacznej zmianie, polegającej nie tylko na zmniejszeniu.

Ostateczny profil fali można napisać:

$$P(x, t) = f(x - ct) + F(x + ct)$$

gdzie funkcja f łączy w sobie wszystkie nakładające się profile fal biegnących ku naczyniom obwodowym, a F wszystkie nakładające się profile odbite biegnące ku sercu. W związku z tym Apéria prowadzi rewizję pojęcia prędkości rozchodzenia się fali, dochodząc do rozróżnienia pozornej, wypadkowej prędkości fal z odbiciami od faktycznej prędkości rozchodzenia się fal składowych.

Dzieło Apérii prowadzi dalej Porjé [19], który zdejmując przebieg ciśnienia pulsu w różnych punktach układu tętniczego i wykonuje najpierw analizę harmoniczną otrzymanych krzywych, poczem dla trzech najniższych alikwotów fali ciśnienia oblicza faktyczne prędkości rozchodzenia się. Metoda rachunkowa Porjégo nawiązuje do sformułowań Apérii. W pierwszym przybliżeniu, zanedbując odbicie, porównuje on ciśnienie dla pewnego alikwotu o punktach x_0 oraz x_1 (wzory przepisane w oznaczeniach stosowanych w naszym artykule):

$$p(x_0, t) = A(x_0) \cos n\omega \left(t - \frac{x_0}{c_n} \right); \quad p(x_1, t) = A(x_1) \cos n\omega \left(t - \frac{x_1}{c_n} \right)$$

i sprowadza $p(x_1, t)$ do postaci

$$p(x_1, t) = A(x_1) \cos n \left\{ \omega \left(t - \frac{x_0}{c_n} \right) - \Delta \alpha_n \right\},$$

gdzie $\Delta \alpha_n$ jest przesunięciem fazy, które można wprost zmierzyć na oscylogramie n -tego alikwotu, wyliczonym ze zdjętych krzywych ciśnienia. Z porównania wyrażeń na $p(x_1, t)$ otrzymuje się:

$$\omega \frac{x_1}{c_n} = \omega \frac{x_0}{c_s} + \Delta \alpha_n, \text{ skąd } c_n = \frac{\omega(x_1 - x_0)}{\Delta \alpha_n}.$$

Uwzględniając odbicia, otrzymuje się po dokładniejszym rachunku pewną poprawkę na różnicę faz $\Delta \alpha_n$, poprawka ta waha się między 1,5 a 8,5%.

Pomiary P o r j é g o mają znaczenie nie tylko dla fizyki, ale również dla medycyny. Okazuje się, że pacjenci cierpiący na podwyższone ciśnienie mają wyższe ciśnienie pierwszego alikwotu, a nie tylko wyższe ciśnienia średnie. Pierwsze trzy alikwoty zdaniem P o r j é g o przenoszą większość energii tętna. Silne odbicia obserwuje się w pierwszym alikwocie, w drugim i trzecim odbicia są znikome. Prędkości rozchodzenia się drugiego oraz trzeciego alikwotu, prawie taka sama, rosną z wiekiem osoby badanej.

Odbicia drugiego i trzeciego alikwotu są silniejsze u osób cierpiących na nadciśnienie, a prędkość rozchodzenia się poszczególnych fal u tych osób również wzrasta.

Należy zwrócić tutaj uwagę na fakt, że lekarski sposób mierzenia ciśnienia nie daje w wyniku średniego ciśnienia w rozumieniu fizycznym tego słowa. Stanowi on pewien przepis, dający wielkość nazywaną „ciśnieniem“, która prawdopodobnie jest proporcjonalna do średniej kwadratowej ciśnienia; przepis ten jest jednak o tyle precyzyjny, że wyniki pomiarów reprodukują się. Pomiar lekarski polega na podwyższeniu ciśnienia hydrostatycznego w tkankach otaczających tętnicę do takiej wysokości, aby wstrzymać rozchodzenie się fali tętna wzdłuż naczynia, nadwyżkę ciśnienia mierzy się i uważa się ją za ciśnienie krwi. Brak jednak ścisłych danych doświadczalno-pomiarowych dotyczących związku między tak mierzonym ciśnieniem a ciśnieniem średnim.

Pomiar zmiennej składowej ciśnienia dokonywany jest dzisiaj doskonalszymi metodami niż metoda M a r e y a, wymieniona na wstępie. Polegała ona na pomiarze ruchu ścian naczynia przy pomocy pneumatycznego przeniesienia. Do naczynia w miejscu, w którym jest ono płytko pod skórą, dotyka pelotka, przyklejona do membrany kauczukowej. Membrana ta zamyka płaskie pudełko walcowate; ruchy jej powodują zmiany ciśnienia powietrza

w pudełeczku. Zmiany te przenoszą się przez cienką giętą rurkę do drugiego analogicznego pudełeczka, którego membrana zaopatrzona jest w piórko piszące na bębnie kimografu. Gdyby naczynie było sprężyste, tzn. gdyby można było zaniedbać bezwładność ścianek naczynia, dalej, gdyby można było zaniedbać bezwładność pełotki i urządzenia piszącego, to wychylenia piórka byłyby proporcjonalne do ciśnienia w naczyniu. Przy uwzględnieniu bezwładności proporcjonalność ta istnieje również, ale tylko dla drgań sinusowych; drgania złożone ulegają deformacji. Aparat Franka — Pettera ma analogiczną budowę, ale napełniony jest cieczą, a nie powietrzem, i zawiera duży opór hydrodynamiczny, tłumiący drgania własne bezwładnego układu. Uchodzi on za dokładniejszy od aparatu Mareya.

Nowoczesne przyrządy są odbiornikami nieruchomymi, które mierzą wprost ciśnienie. Zasadą ich jest użycie kryształów piezoelektrycznych, ładujących się elektrycznie pod wpływem ciśnienia. Kryształ taki nie mierzy ruchu naczynia, tak że nie wprowadza błędu, zawartego w aparatach Mareya oraz Franka i Pettera, polegającego na pomiarze nie ciśnienia, ale amplitudy ruchu ścianki naczynia obciążonej masą nie tylko tkanek, lecz ruchomą masą przyrządu. Kryształ taki mierzy wprost ciśnienie jako siłę. Spostrzeżenia te dał Langevin oraz Gomez*).

Wadą aparatu piezoelektrycznego jest to, że musi on współpracować ze wzmacniaczem lampowym, który naogół osłabia amplitudy drgań o niskich częstościach, a wogóle nie rejestruje składowej stałej ciśnienia. Najdoskonalsze aparaty szwedzkie tej konstrukcji (dr Elmqvist 1950), przyłączone do elektrokardiografu, rejestrują drgania ciśnienia o zakresie od 0,18 Hz do ok. 150 Hz, to zn. o okresach 5,5 sek do 0,006 sek. Należałoby dążyć do rozszerzenia tego zakresu na 0,05 Hz do 2000 Hz; wtedy byłoby możliwe obserwowanie wahań ciśnienia wynikających np. z chwilowego podrażnienia nerwu błędnego, oraz najwyższych alikwotów fali ciśnienia, których ważność będzie wyjaśniona w następnym punkcie.

3. Rozważania końcowe o oporze hemodynamicznym

Całkowite ciśnienie w naczyniu możemy rozłożyć na składnik stały p_0 (ciśnienie średnie) oraz składnik zmienny δp — zaburzenie ciśnienia. Ponieważ zaburzenie jest periodyczne, można je w myśl twierdzenia Fouriera rozłożyć na szereg:

*) cyt. za Porjém [17, 18]

$$p = p_0 + \delta p = p_0 + p_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_1} - \varphi_1 \right) + p_2 \cos 2 \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_2} - \varphi_2 \right) + \dots + p_n \cos n \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \varphi_n \right) + \dots \quad (3.1)$$

$c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ oznaczają tu prędkości fazowe poszczególnych składowych; $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$ oznaczają przesunięcia fazy pomiędzy składowymi.

Podobnie też prędkość cząstki $v = \partial \xi / \partial t$ można rozłożyć na składnik stały v_0 oraz periodycznie zmienne zaburzenie δv prędkości przepływu

$$v = v_0 + \delta v = v_0 + v_1 \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_2} - \psi_1 \right) + v_2 \cos 2 \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_2} - \psi_2 \right) + \dots + v_n \cos n \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \psi_n \right) + \dots \quad (3.2)$$

Znaczenie c_1, c_2, \dots jest to samo, co we wzorze (3.1); przesunięcia fazy $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n, \dots$ są dla prędkości cząstki inne niż dla ciśnienia.

Gdyby nie było zaburzeń δp oraz δv , byłoby możliwe traktowanie zagadnienia spadku ciśnienia wzdłuż pewnego odcinka naczynia w sposób hydrodynamiczny. Mielibyśmy zwykle wzory dla laminarnego przepływu lepkiej cieczy w rurze walcowatej

$$u = \frac{p_2 - p_1}{4 \mu l} (r^2 - y^2) \quad (3.3)$$

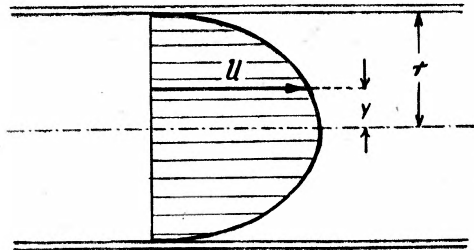
oraz

$$Q = \frac{\pi r^4}{8 \mu} \cdot \frac{p_2 - p_1}{l} = \frac{p_2 - p_1}{W}; W = \frac{8 \mu l}{\pi r^4}. \quad (3.4)$$

We wzorach tych prędkość u , powstająca pod wpływem spadku ciśnienia $p_1 - p_2$ na długości l naczynia, jest równa zero przy ścianie naczynia, gdzie $y = r$, a największa w środku przekroju, gdy $y = 0$ (p. rys. 4); μ oznacza współczynnik lepkości krwi, Q — objętość przepływająca w ciągu sekundy. Średnia prędkość przepływu $v_0 = Q/\pi r^2$, czyli

$$v_0 = \frac{r^2}{8 \mu} \cdot \frac{p_2 - p_1}{l} = \frac{p_2 - p_1}{W^*}; W^* = \frac{8 \mu l}{r^2}. \quad (3.5)$$

W rurach „cienkich“ przepływ zawsze jest laminarny przy „zwykłych“ prędkościach. W rurach „grubych“ przepływ jest turbulentny przy tych samych „zwykłych“ prędkościach, a spadek ciś-



Rys. 4

nienia jest wtedy proporcjonalny do kwadratu prędkości. Przejście ruchu laminarnego w turbulentny otrzymuje się albo przez powiększenie promienia rury, albo przez powiększenie średniej prędkości; następuje ono wtedy, gdy tzw. liczba Re ynoldsa

$$R = \frac{\rho v r}{\mu} \cong 2000. \quad (3.6)$$

Łatwo stwierdzić, jakim wahaniom podlega liczba Re ynoldsa w największych naczyniach. Położmy $r = 1$ cm. Dla patologicznie cienkopłynnej krwi (hydraemia) mamy wg. Hirscha i Becka [11] gęstość $\rho = 1.032$ g/cm³, lepkość $\eta = 1,39$ η', gdzie η' = 0,00684 cm⁻¹g sek⁻¹ oznacza lepkość wody w temperaturze 38° C. Jako minimalną wartość pojemności minutowej serca W można przyjąć w/g Aleksandrowa [1] około 2 500 cm³, skąd

$$v = \frac{W}{60} \cdot \frac{1}{\pi r^2} \cong 13 \text{ cm/sek.}$$

W tym przypadku liczba Re ynoldsa

$$R = \frac{r v \rho}{\eta} = \frac{1 \cdot 13 \cdot 1,032}{0,00684 \cdot 1,39} = 1400.$$

Gdyby przyjąć przy zmniejszonej lepkości krwi normalną objętość minutową 4 500 cm³ lub patologicznie zwiększoną 6 000 cm³, to otrzymaliśmy prędkość przepływu odpowiednio 24 cm/sek bądź

32 cm/sek oraz liczbę R odpowiednio 2580 bądź 3440 — zatem wielkości grożące turbulencyjnym ukształtowaniem się przepływu w tętnicy głównej.

W stanie normalnym odpowiednio $\rho = 1,055$, $\eta = 5,1 \eta'$, objętość minutowa 4 500 cm³, co daje $v = 24$ cm/sek oraz liczbę $R \cong 730$.

W przypadku patologicznie lepkiej krwi mamy $\eta = 9,2 \eta'$, $\rho = 1,045$; jeżeli przyjąć przy tym trzy możliwości: patologicznie małą, normalną i patologicznie wielką objętość minutową, otrzymuje się dla R odpowiednio wartości 216, 398 i 532.

Można więc uważać, że w największych naczyniach w ciele człowieka liczba R e y n o l d s a w normalnych warunkach nie dochodzi do krytycznej wartości, i że przepływ krwi jest laminarny.

Nawiasem mówiąc, jeżeli sprowadzić wyrażenie na liczbę R e y n o l d s a do postaci zawierającej objętość sekundową Q krwi.

$$R = \rho \frac{vr}{\mu} = \rho \frac{Qr}{\pi r^2 \mu} = \rho \frac{Q}{\pi r},$$

to widać, że przy niezmienniej objętości Q , zmniejszenie promienia r prowadzi do wzrostu liczby R e y n o l d s a, co ma znaczenie w przypadku zwężenia światła tętnicy głównej oraz przy stenozach. ponieważ przepływ turbulentny przy tej samej średniej prędkości v daje większe spadki ciśnienia, sumujące się wzdłuż naczyń jako ciśnienie wewnątrzkomorowe.

W odniesieniu do zmiennych składowych ciśnienia oraz prędkości nie możemy stosować prostej teorii hydrodynamicznej. Opór odcinka grubej rury dla przenoszącej się fali ciśnienia ma charakter impedancji akustycznej Z_n

$$p_n = Z_n v_n, \quad (3.8)$$

gdzie p_n oznacza amplitudę ciśnienia fali $\bar{p}_n = p_n \cos n \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \varphi_n \right)$; Z_n — impedancję rury dla tej fali, v_n — amplitudę prędkości cząstki tej fali. Jeżeli wyrazić impedancję jako liczbę zespoloną Z_n , to pisząc

$$\bar{p}_n = \text{część rzeczywista} \{ Z_n v_n \};$$

$$\bar{p}_n = p_n \cos n \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \varphi_n \right); \quad v_n = v_n \cos n \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \psi_n \right) \quad (3.9)$$

wyrażamy przy pomocy impedancji stosunek amplitud i różnicę faz fal ciśnienia i prędkości. Dla odcinka rury impedancja jest taka

sama, jak dla fali płaskiej [19], i wynosi $Z = \rho c$, a jeżeli uwzględnić zależność c od częstości (2. 11)

$$Z_n = \rho c_n = \sqrt{\frac{\rho r}{2} \sqrt{n^2 \omega^2 R^2 + (m n^2 \omega_1^2 - k)^2}}. \quad (3. 10)$$

Dla rury cienkiej prócz tej impedancji pojawi się zwykły opór hydrodynamiczny, równy, według (3. 5) $W^* = \frac{8\mu l}{r^2}$.

O ile więc dla przepływu średniego oraz ciśnienia średniego układ krwionośny składał się z rur cienkich, o tyle dla zaburzeń ciśnienia można uważać go za układ rur grubych, o ile $Z_n > \frac{8\mu l}{r^2}$,

a za układ rur cienkich o ile $Z_n < \frac{8\mu l}{r^2}$.

Dla przeprowadzenia oszacowania tego rodzaju, ważnego dla oceny pracy serca oraz rozkładu oporów wzdłuż układu naczyniowego, narazie brak jest danych i w tym kierunku powinnyby iść dalsze badania fizjologów, pracujących na polu hemodynamiki. Trzeba podkreślić, że znany już jest rozkład oporów dla przepływu średniego *). 10% oporów przypada na naczynia od serca do prekapillarów, a 90% na kapilary. Rozkład ten częściowo warunkuje nieobecność zastojów krwi w naczyniach kapilarnych, w których odbywają się obwodowe przemiany chemiczne. Pojęcie zastój łączy się w ścisły sposób z pojęciem ciągłości strumienia krwi. Spotykane powiedzenia, że do jakiegoś organu napływa więcej krwi niż odpływa, co powołuje zastój, jest nieściśle i sprzeczne z oczywistą prawdą, w myśl której w żadnym odcinku naczynia nie może zniknąć, ani powstać jakakolwiek masa krwi, czy jakiegokolwiek ośrodka przepływającego.

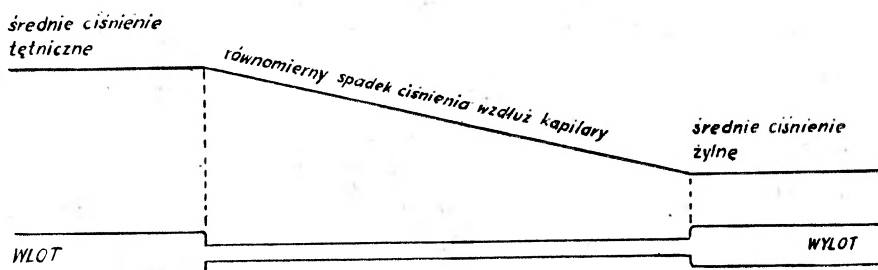
Jeżeli przyjmiemy, że na całej długości pewnego naczynia kapilarnego mamy niezmienny przekrój, to ciśnienie krwi, mierzone względem średniego ciśnienia żylnego, musi spadać proporcjonalnie do długości, mierzonej od wlotu kapilary do punktu pomiaru (patrz rysunek 5). Prędkość przepływu jest wzdłuż kapilary stała. Wyobraźmy sobie, że wskutek pewnego zakłócenia w jakimś odcinku kapilary przekrój uległ zwiększeniu. W tym odcinku nie tylko prędkość przepływu będzie zmniejszona, ale również spadek ciśnienia

*) Sieczeniew, za D. Aleksandrowem, [1]

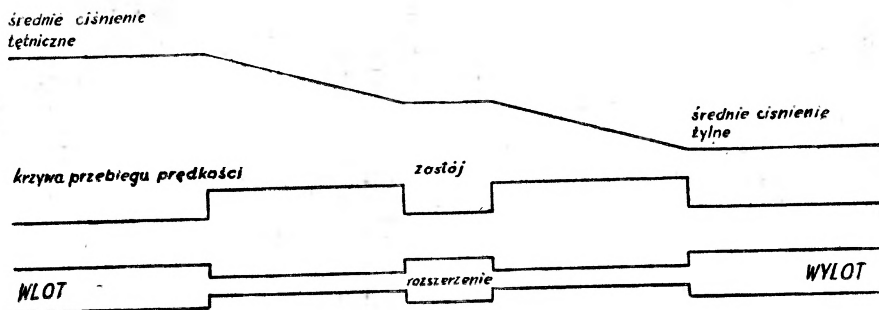
znacznie się zmniejszy. Według wzoru (3.4) opór przepływu przy niezmienniej długości zależy od czwartej potęgi promienia

$$W = \frac{8 \mu l}{\pi r^4}$$

W tym przypadku, w rozszerzonym miejscu kapilary, spadek ciśnienia ulegnie znacznemu zmniejszeniu, a prąd krwi będzie poru-



Rys. 5



Rys. 6

szał się bardzo powoli. Na rysunku 6 krzywa przebiegu prędkości przy rozszerzeniu wykazuje odpowiednie obniżenie; podobne obniżenie przy wlocie i wylocie w rzeczywistości nie istnieje, gdyż arteriole rozgałęziają się i zasilają wiele kapilar; analogicznie weniule zbierają krew z licznych kapilar, a taki przebieg jak na rysunku byłby wtedy, gdyby arteriola przechodziła w jedną kapilare.

Jaka może być przyczyna powstawania takich rozszerzeń? Niezależnie od innych czynników trzeba stwierdzić, że do wnętrza kapilary mogą przenikać zmienne ciśnienia

$$F_r = p_n \cos \omega_1 \left(t - \frac{x}{c_n} - \varphi_n \right).$$

Ciśnienia te wnikają do kapilar od obu końców: jako „dodatnia“ fala ciśnienia tętniczego, oraz „ujemna“ fala, pochodząca od ssącej działalności serca i układu naczyniowego żylnego. Fale te sumują się i tworzyć mogą fale stojące; maximum ciśnienia takiej fali, o ile pojawi się w tym samym miejscu dla wielu alikwotów, może spowodować trwałe rozszerzenie naczynia.

Długość przewodu tętniczego oraz żylnego od serca do kapilary można uważać za tę samą. Wobec tego rozmieszczenie węzłów ciśnienia w kapilarach zależy od przesunięcia w czasie pomiędzy czynnością przedsionków a czynnością komór. Węzły te pojawią się oczywiście tylko przy dostatecznie krótkich falach *); kapilara winna mieć długość równą lub dłuższą od połowy długości fali ciśnienia, tworzącej falę stojącą. Wobec tego podstawowym warunkiem dla pojawienia się fal stojących w kapilarach jest nagłość skurczów serca wprowadzająca wyższe numery n alikwotów fali ciśnienia, oraz szybsza praca serca, wprowadzająca wyższą częstość zasadniczą ω_1 do fali ciśnienia. Stąd wskazówka, że obrzęki które występują przy zastojach krwi można czasem usunąć, podając lekarstwa zwalniające tętno, oraz zmniejszające nagłość uderzenia serca. Okazuje się zarazem, że zagadnienie badania wysokich alikwotów fali ciśnienia, oraz rozkładu oporów dla zmiennej części przepływu byłoby dzisiaj ważnym, a zarazem przygotowanym do zaatakowania przez badaczy.

*Zakład Akustyki i Teorii Drgan
Uniwersytetu Poznańskiego*

Poznań, listopad 1951

*) por wzór (1. 12); w składniku $B \cos \omega t \cos \frac{\omega l}{c}$ czynnik $\cos \frac{\omega l}{c}$ daje zależność amplitudy ciśnienia od położenia l punktu obserwacji. Dla punktu $l=0$ (wlot do rury) $\cos \frac{\omega l}{c} = 1$, następne maximum jest w punkcie $\frac{\omega l}{c} = \pi$, czyli $l = \frac{c\pi}{\omega}$. Widać, że dla ω dużych l jest krótkie. Długość $\frac{2\pi c}{\omega}$ nazywa się długością fali ciśnienia.

Literatura

1. ALEKSANDROW D., Przewlekła niewydolność krążenia w świetle analizy fizycznej, *Arch. Med. Wewn.*, XIX/4, 487, 513 (1949).
2. APÉRIA ARON, Hemodynamical Studies, *Scand. Arch. Physiol.*, 16, 83, (1940).
3. APÉRIA ARON, The Physical Calculation of the Cardiac Output and Its Error, *Acta Physiologica Scandinavica* 16, III, 237 (1942).
4. BROEMSER P., *Zs. f. Biol.*, 100, 88 (1940).
5. BROEMSER P. i RANKE O., *Zs. f. Biol.*, 90, 467 (1930).
6. EULER L, Opera posthuma II. Principia pro motu sanguinis per arteries determinando, Petropoli (1862).
7. FRANK O., *Zs. f. Biol.*, 46, 441 (1905).
8. FRANK O., *Zs. f. Biol.*, 71/72, 255 (1920); 85, 91 (1927); 88, 345 i 249 (1928); 90, 181 i 405 (1930).
9. ФУРФУЕВ В., Электроакустика, str. 64 (ОГИЗ, 1948).
10. HAMILTON W. F. i DOW P., *Amer. J. of Physiol.*, 125, 48 (1939).
11. HIRSCH i BECK, *Deutsch. Arch. f. Klin. Med.*, 1901, 503.
12. v. KRIES J., *Studien zur Pulslehre*, Freiburg (1892).
13. MAREY E. J., *Circulation du Sang* (1884).
14. МАТОВА, i КАЈИУРА G, *Acta Scholae Med. Univ. Imp. in Kioto*, 16/17, 298 (1933/34).
15. MAYER KAROL, Nieznana wielkość siły i pracy serca, *Nowiny Lekarskie*, 330—343 (1946).
16. MAYER KAROL, Grandeur inconnue de puissance et du travail du coeur, *Bull. P.T.P.N., Poznań* 2, 159 (1951).
17. PORJÉ I. G., *Nord. Med.*, 5, 223 (1945).
18. PORJÉ, I. G. oraz ANDERSSON B., *Acta Physiologica Scandinavica*, 12, 3 (1946).
19. PORJÉ I. G., Studies of the Arterial Wave, particularly in the Aorta, *Stockholm* 1948, (Suppl. 42 do *Acta Physiologica Scandinavica*).
20. ПАПАЛЕКСИ, Курс физики I, 335, 346 (ОГИЗ, 1948).
21. WEBER E. H., *Ber. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss.*, 1889 (1850).
22. WEBER W., *Ber. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse*, 18, 353 (1866).
23. WEZLER K. and BÖGER A., *Ergb. Physiol.*, 41, 300 (1931).

SPIS ALFABETYCZNY W/G AUTORÓW ARTYKŁÓW ZAMIESZCZONYCH W II TOMIE „POSTĘPÓW FIZYKI”

	str.
ADAMCZEWSKI I.	— Metoda klisz fotograficznych w badaniach fizyki jądrowej i fizyki promieniowania kosmicznego (dokończenie) 6
ADAMCZEWSKI I. i BERNASIK S.	— Statystyka „gwiazdek“ jądrowych w emulsji klisz fotograficznych (streszcz. referatu zjazd.) 168
ADAMCZEWSKI I.	— Uwagi o możliwości wytwarzania nowotworów w organizmie ludzkim przez promieniowania różnego typu (streszcz. referatu zjazd.) 170
BADZIO T.	— Ruchliwość i rekombinacja jonów w oleju parafinowym w zależności od temperatury (streszcz. zjazd.) 168
BAJER A. i HRYNKIEWICZ A. Z	— Uwagi o mechanizmie mitozy i energii ruchu chromozonów w anafazie (streszczenie referatu zjazd.) 171
CYGAN H.	— Pomiar energii wydzielanej przez elektrycznie pobudzony azot (streszcz. referatu zjazd.) 159
CYNO K.	— Zależność wydajności licznika G. M. od ciśnienia argonu dla linii rentgenowskie $K\alpha$ żelaza (streszcz. referatu zjazd.) 162
DASZKIEWICZ O.	— Nowy prosty typ generatora impulsów prostokątnych (streszcz. ref. zjazd.) 165
DĄBROWSKI J.	— Pomiar słabego promieniowania kwadrupolowego przy pomocy interferencji z promieniowaniem dipolowym (streszcz. referatu zjazd.) 173
DYBOWSKI K.	— Płytki miedziana dwustronnie pokryta tlenkiem miedziowym jako element prostowniczy (streszcz. referatu zjazd.) 158
FLOREK K.	— Zasada pracy elektrointegratora oporowego do rozwiązywania pewnych nieliniowych równań cząstkowych w szczególności równania Thomsona-Fermi'ego w wielu zmiennych (streszcz. referatu zjazd.) 172
GALASIEWICZ Z.	— Wpływ naprężeń wewnętrznych w dielektryku na polaryzację światła odbitego (streszcz. referatu zjazd.) 174

	str.
GIERULA J.	— Rozkład kierunkowy koincydencji comptonowskich (streszcz. referatu zjazd.) 155
GOSTKOWSKI K.	— O związku między koagulacją a ruchli- wością jonów koagulatora (streszcz. re- feratu zjazd.) 169
GÜNTER M.	— Relatywistyczna przestrzeń konfigura- cyjna 2-ch elektronów (streszcz. refe- ratu zjazd.) 173
HRYNKIEWICZ A.	— Zagadnienia bezpieczeństwa pracy ze źródłami promieni w fizyce jądrowej 35
HRYNKIEWICZ A.	— Liczniki scyntylicyjne 88
HRYNKIEWICZ A.	— O rozkładzie kątowym par elektro- nowych wytwarzanych w ołowiu przez promienie gamma $M\alpha Th$ (streszcz. re- feratu zjazd.) 154
HRYNKIEWICZ A.	— Absorpcja w glinie par elektronów wytworzonych w ołowiu przez pro- mienie gamma ThC (streszcz. refe- ratu zjazd.) 155
HURWIC J.	— Stosowanie nasyconych roztworów wody w benzenie i w czterochlorku węgla jako rozpuszczalników w pomiarach momentów dipolowych (streszcz. referatu zjazd.) 170
INFELD L.	— Metoda faktoryzacji a teoria kwantów 193
INGARDEN R. S.	— Nieliniowa elektrodynamika kwantow- wa (streszcz. referatu zjazd.) 172
INGARDEN R. S. i MIKUSIŃSKI J. G.	— Ziarnistość obrazów fotograficznych (streszcz. referatu zjazd.) 166
JANIK J.	— Wyznaczanie widma absorpcji powol- nych neutronów w selenie i w arsenie (streszcz. referatu zjazd.) 154
JASZCZYN P.	— Z badań nad sumami świetlnymi fos- forów (streszcz. referatu zjazd.) 159
JEŻEWSKI M.	— W sprawie pisowni nazw jednostek 143
JEŻEWSKI M.	— O pomiarach wilgotności metodami elektrycznymi (streszcz. refer. zjazd.) 166
JURKIEWICZ L.	— Widmo składowej elektronowej pro- mieniowania kosmicznego na poziomie laboratorium (streszcz. referatu zjazd.) 153
KOŁODZIEJSKI R.	— O formule dyspersyjnej dla procesów jądrowych (streszcz. referatu zjazd.) 154
KRAUSE A.	— Koloidalnie rozproszone gazy 98
KURYŁO Z.	— Pomiar zależności stałej dielektrycz- nej i przewodnictwa elektrycznego substancji fizjologicznych od tempera- tury (streszcz. referatu zjazd.) 171

	str.
KWIEK M.	— Współczesne poglądy na dynamikę obiegu krwi (hemodynamika) 278
ŁOPUSZAŃSKI J.	— Rozwiązanie równania Thomasa-Fermi'ego dla molekuł o symetrii osiowej (typu CO ₂ , N ₂ itp.) (streszcz. referatu zjazd.) 174
MAJEWSKI W.	— Otrzymywanie prostowniczych elementów kuprytowych (streszcz. referatu zjazd.) 158
MAKIEJ B.	— Badania widma promieni gamma towarzyszących przemianom beta ³² P i ⁹⁰ Y (streszcz. referatu zjazd.) 156
MAKIEJ B.	— Zastosowanie rozwidłonej przewodnicy światła do koincydencyjnego liczenia scyntylacji cząstek α (streszcz. referatu zjazd.) 166
MAŁKOWSKI Z.	— Wpływ pobudzenia monochromatycznego na świecenie roztworów tetrahydrofluorocyklenu (streszcz. referatu zjazd.) 159
MAURIN L.	— Obserwowalność linii promieniowania elektrycznego oktopolowego w widmach rentgenowskich oraz reguły wyboru dla liczby kwantowej głównej (streszcz. referatu zjazd.) 174
MIEŚOWICZ M. i MASSALSKI J. M.	— Lokalne promieniowanie gamma w pomiarach promieniowania kosmicznego na dużych głębokościach (streszczenie referatu zjazd.) 153
MIEŚOWICZ M., JURKIEWICZ L. i MIKUCKI A.	— Sondowanie promieniotwórczości w otworach wiertniczych nową aparaturą dostosowaną do istniejących warunków technicznych (streszcz. referatu zjazd.) 157
MORSTIN T.	— O pomiarach czasu martwego liczników G. M. metodą opóźnionych koincydencji (streszcz. referatu zjazd.) 163
MOŚCICKI W.	— Mezony 103
MOŚCICKI W.	— Mezony (c. dalszy) 233
MOŚCICKI W.	— Wpływ oporu katodowego na własności stabilizatora typu S. W. (streszcz. referatu zjazd.) 164
MOŚCICKI W. i OLSZAŃSKI S.	— Stabilizator napięć do 4 kV typu rs D obciążalny do 5 m A (streszcz. referatu zjazd.) 164
MUSIATOWICZ T.	— Badanie przewodnictwa cieplnego cieczy w zależności od jej prędkości i rodzaju ruchu (streszcz. referatu zjazd.) 169

	str.
NATANSON A.	— Zasięgi cząstek α i protonów w emulsji fotograficznej w zależności od ich energii (streszcz. referatu zjazd.) 167
PIEKARA A. i PAJĄK Z.	— Badanie fluktuacji zasięgu cząstek alfa w emulsjach fotograficznych (streszcz. referatu zjazd.) 167
PIEŃKOWSKI S.	— Rozproszenie promieni X jako podstawa badań mikrostruktury ciał niejednorodnych 51
PIEŃKOWSKI S.	— Zgrupowania promieniotwórcze w meteorytach (streszcz. referatu zjazd.) 156
PIEŃKOWSKI S. i ZMYŚŁOWSKA S.	— O rozkładzie promieniotwórczym ciał promieniotwórczych w polskich granitach dolnośląskich 156
PNIEWSKI J.	— Widmo RaE w dziedzinie małych energii uzyskane metodą klisz rejestrujących tory elektronowe (streszcz. referatu zjazd.) 156
PNIEWSKI J. i DANYSZ M.	— Przygotowanie cienkich źródeł do celów spektrografii β (streszcz. referatu zjazd.) 166
PUCHALIŃ M.	— Napięcie powierzchniowe układów dwuskładnikowych (streszcz. referatu zjazd.) 169
RAYSKI J.	— Elektrodynamika kwantowa w postaci wzajemnościowej (streszcz. referatu zjazd.) 172
ROGALSKA Z.	— Wpływ częstości zmian oświetlenia na pracę komórki zaporowej (streszcz. referatu zjazd.) 158
ROMER W.	— Ziarnistość powiększonych obrazów fotograficznych (streszczenie referatu zjazd.) 167
ROSIŃSKI R.	— Termiczne zmiany fluorescencji roztworu biacenaftelidenu w silikonie (streszcz. referatu zjazd.) 159
ROUPPERT S.	— Badanie rozkładu kąтового protonów w reakcji (α, p) w glinie (streszcz. referatu zjazd.) 175
RZEWUSKI J.	— O wzajemnym oddziaływaniu cząstek w teorii Feynmana (streszcz. referatu zjazd.) 173
RZEWUSKI J.	— Interpretacja statystyczna równania Kleina - Gordona (streszcz. referatu zjazd.) 173
RZEWUSKI J.	— Teoria pól bez rozbieżności (streszcz. referatu zjazd.) 173

	str.
SOBCZYŃSKI Z.	— Badania gwiazdek podwójnych w emulsjach fotograficznych do badań jądrowych (streszcz. referatu zjazd.) 168
SOSNOWSKI L.	— Fizyka polska w okresie międzywojennym i stan jej odbudowy w latach 1945—1950 79
SUŁOCKI J.	— Wytrzymałość, stała dielektryczna i przewodnictwo elektryczne w zależności od temperatury dielektryka typu masy kablowej (streszczenie referatu zjazd.) 157
SUFFCZYŃSKI M.	— Zależność wydajności liczników G. M. na promienie gamma od grubości i rodzaju ścianki (streszcz. referatu zjazd.) 162
TWARDOWSKA B.	— Bioluminescencja bacterium phosphorescens (streszcz. referatu zjazd.) 171
ZAWADZKI A.	— Ś. P. Prof. Dr Marian Grotowski 1
ZAWADZKI A.	— Uniwersalny układ koincydencyjno-selekcyjny (hodoskop) (streszcz. referatu zjazd.) 165

TREŚĆ TOMU II

Zeszyt 1—3

	str.
Śp. Prof. Dr Marian Grotowski	1
Ignacy ADAMCZEWSKI: Metoda klisz fotograficznych w badaniach fizyki jądrowej i fizyki promieni kosmicznych	6
Andrzej HRYNKIEWICZ: Zagadnienia bezpieczeństwa pracy ze źródłami promieni w fizyce jądrowej	35
Stefan PIEŃKOWSKI: Rozproszenie promieni X jako podstawa badań mikrostruktury ciał niejednorodnych	51
Leonard SOSNOWSKI: Fizyka Polska w okresie międzywojennym i stan jej odbudowy w latach 1945—1950	79
Andrzej HRYNKIEWICZ: Liczniki scyntylacyjne	88
Alfons KRAUSE: Koloidalnie rozproszone gazy	98
Włodzimierz MOŚCICKI: Mezony	103
Mieczysław JEŻEWSKI: W sprawie pisowni nazw jednostek	143
Sprawozdanie z XIII Zjazdu Fizyków Polskich w Krakowie	147
Streszczenie referatów z prac własnych	153
KOMISJA TERMINÓW: Terminy, oznaczenia, jednostki	176
Przyznanie Stefanowi Pieńkowskiemu godności członka honorowego Polskiego Towarzystwa Fizycznego	189

Zeszyt 3—6

Leopold INFELD: Metoda faktoryzacji a mechanika kwantowa	193
Włodzimierz MOŚCICKI: Mezony (c. dalszy)	233
Marek KWIEK: Współczesne poglądy na dynamikę obiegu krwi (hemodynamika)	278

POLSKIE TOWARZYSTWO FIZYCZNE

Zarząd

Przewodniczący	— Prof. Dr WOJCIECH RUBINOWICZ, czł. rzeczywisty PAN
Wiceprzewodniczący	— Prof. Dr STEFAN PIENKOWSKI, czł. rzeczywisty PAN
Sekretarz	— Mgr TADEUSZ SKALIŃSKI
Bibliotekarz	— Dr WŁODZIMIERZ ŚCISŁOWSKI
Skarbnik	— Prof. Dr ANDRZEJ SOLTAN, czł. koresp. PAN
Redaktorzy	— Prof. Dr STEFAN PIENKOWSKI, czł. rzeczywisty PAN Prof. Dr SZCZEPAN SZCZENIOWSKI Prof. Dr JAN WEYSSENHOFF

Przewodniczący Oddziałów Towarzystwa

Gdańsk	— Prof. Dr ARKADIUSZ PIEKARA
Gliwice	— Prof. Dr MARIAN PUCHALIK
Kraków	— Prof. Dr MARIAN MIĘSOWICZ
Lublin	— Prof. Dr STANISŁAW ZIEMECKI
Łódź	— Prof. Dr STANISŁAW SACHS
Poznań	— Prof. Dr STANISŁAW LORIA
Toruń	— Prof. Dr JAN RZEWUSKI
Warszawa	— Prof. Dr LEONARD SOSNOWSKI
Wrocław	— Prof. Dr JAN WESOŁOWSKI

Adres Zarządu: Instytut Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego — Warszawa, ul. Hoża 69

Nr zam. 369/10. — Druk rozp. 10. 4. 1952 r. — Druk ukończ. 9. 8. 1952 r.
Pap. druk. sat. kl. V, form. 70×110 cm, 70 g - Ark. druk. 7. - K-3-15006 Nakład 1800

CZCIONKAMI POZNAŃSKIEJ DRUKARNI NAUKOWEJ, FREDRY 10